UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Astronomia Grega na Aula de Geometria

Felipe Ribeiro Gomes

Rio de Janeiro
2017

Felipe Ribeiro Gomes

Astronomia Grega na Aula de Geometria

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Gladson Antunes
Doutor em Matemática – UNIRIO

Co-orientador: Leonardo Silvares
Doutor em Matemática - UFF

Rio de Janeiro
2017

Felipe Ribeiro Gomes

Astronomia Grega na Aula de Geometria

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovada em 07 /06 /2017

BANCA EXAMINADORA

____

____

____

____

Rio de Janeiro
2017

Dedico este trabalho à minha amada família, simplesmente,
minha maior riqueza.

“Eu tentei 99 vezes e falhei,
mas na centésima tentativa
eu consegui, nunca desista de seus
objetivos mesmo que ele pareçam
impossíveis, a próxima tentativa
pode ser a vitoriosa.
(Albert Einstein)

Agradecimentos

À Deus por ter guiado meus caminhos dando-me forças e perseverança para concluir o curso.

Agradeço aos meus professores, meu orientador Gladson e principalmente o meu co-orientador, Leonardo Silvares, pela paciência e dedicação para comigo, na realização do trabalho.

Agradeço a minha Esposa, Tatiane Ribeiro, por me apoiar e me dar forças nos momentos difíceis que passei no Profmat.

Agradeço aos meus pais, Lenir e Paulo, que com toda dificuldade, sempre me deram uma boa educação, apoio incondicional e muito amor e carinho. A vocês minha eterna gratidão.

Agradeço aos companheiros, Rosinaldo, Margareth, Bianca e Oswaldo, alunos do Profmat, pelos dias de intensos estudos em grupo, que serviram para meu crescimento profissional.

Agradeço a todos, que de alguma forma, contribuíram para a realização desse trabalho.

Resumo

A cada momento nos deparamos com a necessidade de tornar significativo o aprendizado do ensino da Matemática na vida dos nossos alunos. Muitas vezes nossos discentes não compreendem o significado de certos conteúdos, ficando no campo da abstração e do desencorajamento.

Neste trabalho propomos, uma forma de o professor tornar interativa sua aula de Geometria, do primeiro ano do Ensino Médio, com a Astronomia praticada pelos gregos séculos antes de Cristo. Nela, sugerimos resoluções de exercícios pautados nas teorias e descobertas que esses astrônomos realizavam. Pretendemos, com isso, levar os discentes a percepção e a interação dos conteúdos estudados na sua grade curricular para com a sua vida cotidiana.

Essas questões foram elaboradas de modo a permitir ao discente concluir, com seus próprios pensamentos, as mesmas conclusões e teorias que os astrônomos tiveram antigamente, fomentando assim um ensino por descobertas, capaz de motivar a resolução das demais atividades propostas.

Por fim, esperamos que esse trabalho seja uma fonte inspiradora para que outros professores pautem suas aulas no ensino voltado para a aprendizagem por descobertas.

Palavras-chave: Astronomia Grega. Ensino da Geometria. Aprendizagem por descobertas.

Abstract

At each moment we are faced with the need to make learning the teaching of Mathematics meaningful in the lives of our students. Often our students do not understand the meaning of certain contents, remaining in the field of abstraction and discouragement.

In this work, we propose a way for the teacher to make his Geometry class, from the first year of high school, with the astronomy practiced by the Greeks centuries before Christ. In it, we suggest resolutions of exercises based on the theories and discoveries that these astronomers realized. We intend, with this, to take the students the perception and the interaction of the contents studied in their curriculum to their daily life.

These questions were elaborated so as to allow the student to conclude with his own thoughts the same conclusions and theories that astronomers had in the past, thus fostering a teaching of discovery, capable of motivating the resolution of the other proposed activities.

Finally, we hope that this work will be an inspiring source for other teachers to step up their lessons in learning for discovery.

Keywords: Greek Astronomy. Teaching Geometry. Learning by discovery.

Sumário

Lista de Figuras

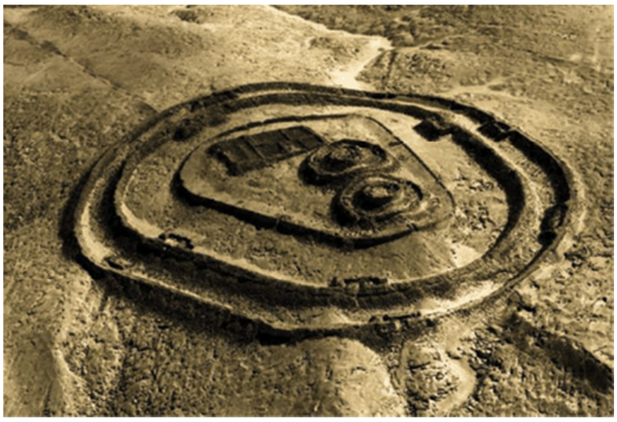
1. Introdução e Contexto Histórico

Astronomia Antiga

Desde os tempos pré-históricos, a Astronomia já era difundida entre os estudiosos, e, não por acaso, ela é considerada a ciência mais antiga do mundo, (Alarsa, 1982, p. 13). A necessidade dos povos antigos de guiar-se pelas estrelas, de saber a melhor época de plantio e colheita, da contagem do tempo e até mesmo previsões do futuro fizeram os pensadores do mundo antigo ter um olhar diferenciado para o céu. Os chineses, os babilônicos, assírios e egípcios, por exemplo, já usavam a duração de um ano com 365 dias, (Colin, 2001, p. 37), já eram feitas anotações precisas sobre meteoros e meteoritos, os polinésios navegaram usando as observações celestes, em várias partes do mundo podemos observar traços da Astronomia difundida entre os povos. Vejamos alguns exemplos.

O mais antigo observatório conhecido é o de Chankillo, no Peru, construído entre 200 e 300 a.C.

Figura 1.1 - Observatório de Chankillo



Fonte: http://astro.if.ufrgs.br/antiga/Chankillo.gif

O Stonehenge, Reino Unido, construído por pedras que chegam a 5 metros de altura e quase 26 toneladas, nessa estrutura, algumas pedras estão alinhadas com o nascer e o pôr do Sol no início do verão e do inverno.

Figura 1.2 - Stonehenge

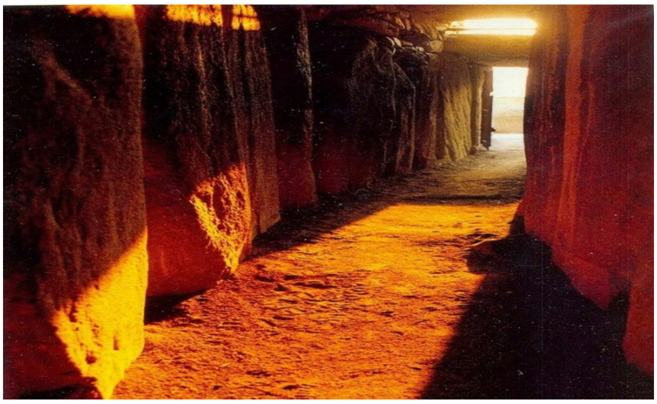
Fonte:
https://www.google.com.br/search?q=Em+Stonehenge&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwj1vfHj_drPAhUBhpAKHVNEAKMQ_AUICCgB&biw=1236&bih=580#imgrc=4h4pcSq1rRxNxM%3A

Newgrange, Irlanda, é uma tumba e um dos mais famosos sítios pré-histórico no mundo. Ele foi construído para ao nascer do sol do dia mais curto do ano (solstício de inverno) um raio de sol iluminar o piso da câmara no final de um longo corredor.

Figura 1.3 – Tumba de Newgrange

Fonte: http://www.vidanairlanda.com/2010/08/conhecendo-a-irlanda-newgrange.html#axzz4NAm134Nv

Figura 1.4 - Interior da tumba de Newgrange



Fonte: http://theoccultjah.blogspot.com.br/2012/03/newgrange-el-salmon-y-la-vaca-sagrada.html

Mas os resultados mais significativos se deram na Grécia por volta de 600 a.C. à 200 d.C. Estudos realizados nesta época são tão significativos que foram utilizados já no século XVII por astrônomos da grandeza de Copérnico e Kepler (Colin, p. 128). Do conhecimento herdado dos povos mais antigos e com esforços de conhecer os cosmos, os gregos surpreenderam o mundo com sua perspicácia e genialidade, dentre os astrônomos da Grécia antiga, destacam - se:

Tales de Mileto, nasceu por volta de 624 a.C., sua fama veio por intermédio de seus estudos na área da astronomia. Dizem que previu o eclipse total do Sol ocorrido em 28 de maio de 525 a.C., através do conhecimento do ciclo de eclipses, que trouxe das suas viagens ao Egito. Trouxe também para a Grécia os conceitos de uma geometria prática usada pelos egípcios que a partir daí deu origem a estrutura geométrica que temos hoje. Defendia que a terra era um disco plano em uma vasta extensão de água. (Colin, p. 69 - 70)

Pitágoras de Samos, nascido por volta de 560 a.C., era um líder religioso de grande influência nas gerações posteriores. Aprendeu no Egito a relação 3, 4 e 5 do triângulo. No que se restringe a astronomia Pitágoras admitia que a Terra era um planeta em órbita como todos os outros. Esse ponto de vista é dado a Filolau, um dos seus discípulos. Admitia também que a terra era esférica, uma vez que é bem possível que ele observou um navio desaparecer no horizonte. (Colin, p. 75 - 78).

Aristóteles de Estagira, nasceu por volta de 384 a.C. Estudou na academia de Platão, no qual o próprio Platão o chamou de “O Intelecto”. Passou boa parte de sua vida estudando astronomia, tema que tinha uma atração especial. Para Aristóteles a Terra era o centro do universo. Acreditava que a Terra e os corpos celestes se moviam em movimentos circulares. Escreveu sobre a esfericidade da Terra, no qual não tinha dúvidas quer por razões estéticas ou físicas. (Colin, p. 110 – 111)

Aristarco de Samos, estima-se ter vivido entre cerca de 310 e 230 a.C.. Foi o primeiro a propor que a Terra se movia em volta do Sol, antecipando Copérnico em quase 2000 anos.

Entre outras coisas, desenvolveu um método para determinar as distâncias relativas do Sol e da Lua à Terra e mediu os tamanhos relativos da Terra, do Sol e da Lua. (Colin, p. 125 - 126)

Eratóstenes de Cirênia nasceu provavelmente por volta de 276 a.C. Como matemático resolveu a duplicação do cubo, dando uma solução que acreditava ser melhor de todas as outras. Desenvolveu um método de encontrar os números primos, método esse chamado como o "Crivo de Eratóstenes". Foi quem mediu o comprimento da circunferência da Terra, chegando a um resultado bem satisfatório. (Colin, p.125)

Hiparco de Nicéia, considerado o maior astrônomo observador da Antiguidade Clássica, passou a maior parte de sua vida no observatório na ilha de Rodes, como resultado, reuniu um catálogo com a posição no céu e a magnitude de 850 estrelas. Mediu a duração do ano com grande exatidão, 365,2467 dias (valor atual é de 365,2422 dias). (Colin, p. 127)

Ptolomeu foi o último astrônomo importante da antiguidade. Escreveu uma série de treze volumes sobre astronomia, conhecida atualmente como, *O Almagesto,* que se tornou o alicerce da astronomia matemática na Grécia Antiga, estudos escritos neste livro foram usados por Copérnico e Kepler. (Colin, p. 128)

Sobre o presente trabalho

Os povos antigos já realizavam cálculos e medidas com grande precisão. Mas, foram os gregos que inseriram as provas e as conexões dos teoremas, fazendo com que a matemática se tornasse uma ciência (Kleiner, p. 154-156). Neste trabalho analisaremos algumas obras que os Astrônomos Gregos realizaram. A proposta aqui é integrar essas obras ao conhecimento da geometria, para que os alunos possam entender a função da disciplina usada em sala de aula. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, os PCNs, o estudo da geometria muitas vazes é deixado de lado nas aulas de matemática, ocasionando uma perda da possibilidade de o aluno pensar de forma particular, compreendendo, descrevendo e representando ordenadamente o mundo que vivemos. Os novos modelos de ensino buscam relacionar os conteúdos de forma a ampliar o horizonte dos discentes, mostrando aplicações da Matemática em variadas disciplinas e setores, como Geografia, Biologia, Química, Física, Economia, Administração, entre outras.

Sendo assim, o professor conseguirá mostrar significados e proporcionar uma aprendizagem capaz de responder a algumas das perguntas mais feitas nos dias atuais em sala de aula: "Professor para que eu tenho que aprender isso?", "Onde vou usar isso na minha vida?".

Nas questões propostas neste trabalho buscamos fazer conexões entre a Geometria e a Astronomia Antiga, para isso, alguns tópicos relacionados no Ensino Fundamental serão de suma importância para o desenvolvimento do educando. Os discentes necessitarão de conhecimentos prévios tais como: Teorema de Tales, Proporção, Perímetro de uma Circunferência, Arcos e ângulos ao centro de uma circunferência, Ângulos alternos e internos de retas paralelas cortadas por uma transversal. Certamente encontraremos alunos com uma defasagem nesses conceitos, sugerimos, então, como fonte de estudo e orientação sobre estes temas, o livro Geometria Euclidiana Plana, de João Lucas Barbosa (Barbosa) e o volume 9 da coleção Fundamentos da Matemática Elementar (Dolce).

Ao ingressar no Ensino Médio, onde se tem por finalidade, de acordo com a LDB/96, um ensino capaz de proporcionar no aluno os valores de solidariedade, cidadania e sensibilidade, o Ensino da Matemática deve complementar e aprofundar os conteúdos já estudados. Com isso daremos ênfase na resolução das questões do presente trabalho de forma mais plena.

2. Fases da Lua para estimar a razão entre a distância à Lua e ao Sol

Público Alvo

Alunos do 1° ano do Ensino Médio que tenham em seu currículo base em proporções, semelhança de triângulos, soma dos ângulos internos de um triângulo e medidas do seno e cosseno de um ângulo.

Objetivos Gerais

A presente atividade tem o intuito de estimular nos alunos a construção do conhecimento, desenvolver um raciocínio lógico, proporcionar o conhecimento necessário sobre os conteúdos oferecidos de modo que sejam capazes de resolver problemas do cotidiano. Mostrar que a matemática interage com outras áreas do conhecimento, nesta atividade, por exemplo, levamos o aluno a relacionar os conteúdos geométricos com a Astronomia.

Objetivos Específicos

Através de problemas ligados a Astronomia Grega, o discente obterá conhecimentos básicos de Geometria, efetuará medições e interpretará os resultados de modo que conclua que a distância da Terra-Sol é aproximadamente 400 vezes a distância da Terra-Lua, fornecendo assim um estudo centrado no aluno. Chegará à conclusão de que o erro de Aristarco está na diferença do ângulo Terra-Lua-Sol e concluirá que esse erro gerou uma grande diferença nessas distâncias. O trabalho será orientado de modo que permita desenvolver a autonomia do aluno e sua competência em resolver problemas.

O astrônomo e matemático Aristarco de Salmos, por volta do século III a.C., obteve, brilhantemente, através de cálculos geométricos, a razão entre as distâncias da Terra a Lua e da Terra ao Sol, foi também, possivelmente, o primeiro cientista a afirmar que a terra gira em torno do Sol e que tem movimento de rotação (Alarsa, 1982). Ao observar as fases da Lua concluiu que, no quarto crescente ou quarto minguante (quando o disco lunar encontra - se metade iluminada para um observador terrestre) o triângulo Terra-Lua-Sol é retângulo com ângulo reto no vértice da Lua. Essa constatação pode ser observada ao nascer ou ao pôr-do-sol, quando podemos ver a Lua quase na vertical acima de nossas cabeças. A partir desta constatação e de posse do tempo necessário para a Lua completar uma volta em torno da terra e do tempo da passagem do quarto crescente ao quarto minguante, Aristarco concluiu, através de uma proporção que a distância da Terra ao Sol é aproximadamente 20 vezes a distância da Terra à Lua. Atualmente, sabemos que essa distância é cerca de 400 vezes, tendo este erro se originado na medida de um ângulo que é bem próximo de $89{,}86^o$ (Ávila, p.41), ou seja, um erro na precisão da medida do ângulo resultou nesta diferença.

A proposta dessa atividade tem como objetivo de fazer o aluno responder as questões, na sua ordem sequencial, aqui descritas sendo capaz de reproduzir a ideia de Aristarco e, ao final desta, ser capaz de medir essas distâncias de forma atual. Ele também será capaz de relacionar os conteúdos abordados de geometria com a astronomia.

Quem está mais longe, Sol ou Lua?

Primeira Questão: Observando o movimento da Lua ao longo de um mês, procure descobrir quem está mais longe da Terra, o Sol ou a Lua? Justifique sua resposta com base nas observações feitas.

O professor deve sugerir que os discentes observem o movimento da Lua ao longo de um mês. Iniciando pela lua cheia e, notando as passagens de suas fases, perceberão que a luminosidade vai diminuindo progressivamente até a fase nova. Isso significa que a Lua vai se inserindo entre a Terra e o Sol. Caso o aluno não consiga chegar a este resultado, o docente pode propor uma pesquisa sobre o Eclipse Solar. Induzindo o aluno a entender que neste tipo de eclipse a lua se coloca entre a terra e o sol, uma prova que a Lua está mais perto da terra que o Sol.

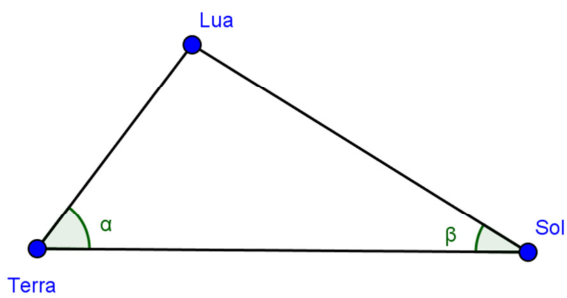
Figura 2.1 - Eclipse Solar

Fonte: http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/geografia/eclipse-solar.htm

Triângulo Terra-Lua-Sol

Segunda Questão: De acordo com a resposta da questão anterior, ou seja, com a Lua entre a Terra e o Sol, formaremos com as posições Terra-Lua-Sol um triângulo TLS (ver Figura 2.2). Triângulo esse, que nos dias sugeridos na tabela I, em anexo, constataremos a Lua na posição do Quarto Crescente ou Quarto Minguante. Logo, qual o ângulo interno no vértice da Lua desse triângulo? Qual a classificação desse Triângulo? Suponha que o movimento é uniforme ao longo da órbita, qual a relação entre os ângulos internos $\angle LTS = \alpha$ e $\angle LST = \beta$?

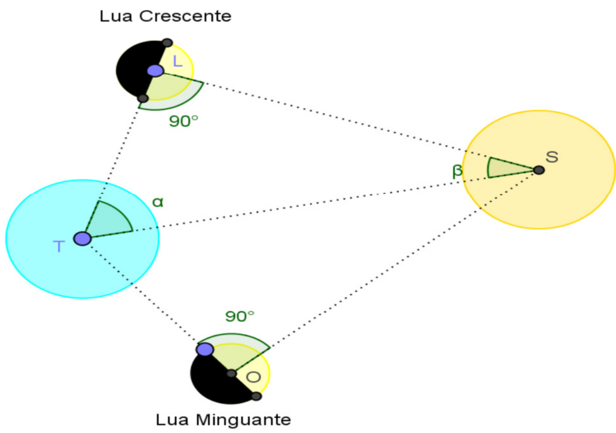
Figura 2.2 - Triângulo Terra-Lua-Sol



Fonte: autor

Dentre os três ângulos internos do triângulo, o professor deve constatar que nos dias descritos na tabela do Anexo A, a Lua encontra-se no quarto crescente ou no quarto minguante, o professor pode fazer a observação por constatação. Ao nascer do Sol e no pôr-do-sol, ela se encontrará acima de nossas cabeças (ver Figura 2.3), com isso o ângulo do triângulo Terra-Lua-Sol tem no vértice da Lua um ângulo de aproximadamente 90°. Essa ideia, Aristarco teve ao observar o ciclo lunar. Com isso, o triângulo Terra-Lua-Sol é retângulo, tendo como hipotenusa o lado Terra-Sol.

Figura 2.3 - Posição da Lua nos quartos crescente e minguante



Fonte: autor

O docente pode, a partir daí, apresentar o triângulo Terra-Lua-Sol, ou simplesmente TLS, (desenhando-o no quadro, por exemplo) e indagar aos alunos a relação entre os ângulos$\angle LTS = \alpha$ e $\angle LST = \beta$ orientando que cheguem à conclusão de α e β serem complementares. Agora cabe ao professor perguntar e orientar como calcular os ângulos α e β, o que será indicado na seção seguinte.

O ciclo lunar

Conhecer o ciclo lunar, para determinar os valores desses ângulos é de suma importância. Pode aqui, o professor, pedir uma pesquisa sobre o assunto.

Pesquisa: Qual a duração do ciclo lunar? Qual o tempo decorrido entre as posições de passagem da Lua do Quarto Crescente para o Quarto Minguante e vice-versa.

Sugestões de como conduzir:

1) Um bom procedimento é separar a turma em grupos e pedir que, ao longo de um semestre, façam essas medições e no final a sua média para determinar esses valores.

2) Se o professor não dispuser desse tempo, pode sugerir uma pesquisa na internet, como, por exemplo, no site http://astro.if.ufrgs.br/lua/lua.htm

3) Ou, se achar conveniente, o professor, pode já informar a duração, 14,25 que é metade do ciclo lunar, de 29,5 dias (Alarsa, 1982, p. 73).

Resposta para a pesquisa:

Entre a posição *M* (minguante) e *C* (crescente) na figura- 2.2, o tempo decorrido é de 14,25 dias, já o ciclo total é de 29,5 dias (Alarsa, 1982, p. 73).

De posse da duração do ciclo lunar, podemos agora determinar os ângulos α e β, para isso basta fazer a proporção:

$$\frac{360°}{2\alpha} = \frac{29,5}{14,25},$$

logo

$$\alpha = \frac{360° \cdot 14,25}{2 \cdot 29,5},$$

e então

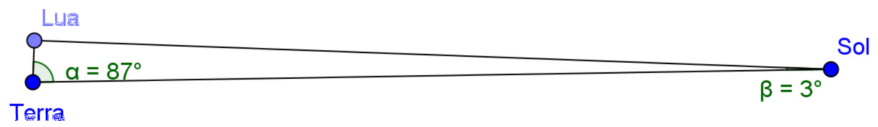
$$\alpha = 86,95° \approx 87°.$$

Como os ângulos α e β, são complementares, logo $\beta \approx 3°$.

A razão entre as distâncias

Terceira Questão: Sabendo que o triângulo Terra-Lua-Sol tem ângulos como na Figura 2.4, abaixo, determine a razão entre Terra-Lua e Terra-Sol. (São dados sen 87° = 0,998, cos 87° = 0,0523 e tan 87° = 19,08)

Figura 2.4 – Triângulo Terra-Lua-Sol



Fonte: autor

Pela Figura 2.4, o cosseno do ângulo alpha = 87° é a razão entre as medidas de *TL* (cateto adjacente ao ângulo alpha) e *TS* (hipotenusa). Então,

$$\cos 87° \approx 0{,}0523 = \frac{TL}{TS} \therefore TS \approx 19{,}12\,TL.$$

Note que TL é a distância entre a Terra à Lua, e TS a distância entre a Terra ao Sol. Como esses valores são aproximados, logo deduziremos que a razão entre essas distâncias está compreendida entre 18 e 20 vezes, isto é:

$$18 < \frac{TS}{TL} < 20$$

Um cálculo mais preciso

Sabemos atualmente que essa razão é cerca de 400 vezes, tendo este erro se originado na medida do alpha que é bem próximo de 89,86° (Ávila, p.41). O professor pode aqui propor uma nova questão igual a anterior com os valores corretos, ou seja, α = 89,86°. Então considerando o cos 89,86° = 0,002443 teremos como nova razão:

$$\cos 89{,}86° = \frac{TL}{TS} \therefore TS = \frac{TL}{\cos 89{,}86°} \approx \frac{TL}{0{,}002443} \approx 409\,TL.$$

Discussão: Observando a tabela trigonométrica do Anexo B, analisar a variação relativa do valor do cosseno e do seno para ângulos próximos de 90°. Com isso, deve-se chamar atenção para o fato de que, próximo de 90° qualquer imprecisão na medida do ângulo α tem impacto muito grande sobre o valor de $1/_{\cos\alpha}$, que é a *secante* do ângulo α , denotada por sec α.

3. Raios e distâncias da Lua e do Sol em função do raio da Terra

Público Alvo

Alunos do 1° ano do Ensino Médio que obtiveram em sua vida escolar base em proporções, semelhança de triângulos, perímetro de uma Circunferência, Arcos e ângulos ao centro de uma circunferência.

Objetivos Gerais

O objetivo desta atividade é guiar os alunos a construírem um raciocínio lógico, proporcionando conhecimento necessário sobre os conteúdos oferecidos de modo que sejam capazes de resolver problemas do dia-a-dia. Mostrar que a matemática interage com outras áreas do conhecimento, nesta atividade levaremos os alunos a relacionarem os conteúdos geométricos tais como: Teorema de Tales, Proporção, Perímetro de uma Circunferência, Arcos e ângulos ao centro de uma circunferência na aplicação da Astronomia.

Objetivos Específicos

Através de problemas ligados ao raio da Terra, Lua e Sol trabalhado por Aristarco, o aluno perceberá que conhecimentos de Geometria básica foram aplicados na Astronomia antiga. O discente, aqui, responderá questões que levarão ao resultado estimado por Aristarco para esses raios e serão capazes de descobrir os resultados, fomentando um ensino por descoberta, desenvolverá a competência de resolver problemas e aplicar esse conhecimento na sua vida.

Por volta do século III a.C., Aristarco propôs uma forma de calcular, em função do raio da Terra, os raios da Lua e do Sol, e distâncias da Terra a estes dois astros.

Aristarco, observando os eclipses lunares, chegou à conclusão que Lua e Sol tem o mesmo "tamanho angular", isto é, o ângulo com que um observador vê a Lua e o Sol são iguais.

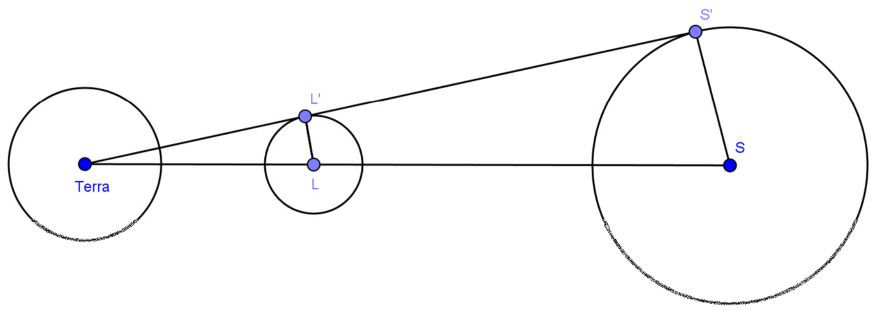
Figura 3.1 - Eclipse Solar

Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Film_eclipse_soleil_1999.jpg

Este fato pode ser facilmente comprovado pelo eclipse total do Sol, quando ele exibe a coincidência exata dos discos, solar e lunar.

O ângulo observado foi estimado por Aristarco como sendo 2°, quando na realidade vale 0,5°, mas esse erro não altera o raciocínio como veremos a seguir. Analisando a Figura 3.2, concluímos que os triângulos $LL'T$ e $SS'T$ são semelhantes, pois os ângulos LTL' e STS' são iguais e que os ângulos $LL'T$ e $SS'T$ são retos. Com isso temos a proporção $\frac{SS'}{LL'} = \frac{TS}{TL}$, sendo SS’ e LL’ os raios do sol e da lua respectivamente e TS e TL as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua, respectivamente. Como Aristarco considerava que $18 < \frac{TS}{TL} < 20$ e, tendo $\frac{SS'}{LL'} = \frac{TS}{TL}$, concluiu que $18 < \frac{SS'}{LL'} < 20$.

Figura 3.2 – Esquema de um eclipse solar



Fonte: autor

De acordo com o pensamento de Aristarco, o professor poderá pedir aos seus alunos que respondam algumas questões abaixo relacionadas com o objetivo de que os discentes cheguem as medidas dos raios da Lua e Sol.

Razão entre os raios da Lua e do Sol

Nas questões que seguem, o professor deve estimular o discente a concluir que o raio do sol é aproximadamente 20 vezes o raio da lua, segundo os cálculos usando por Aristarco. Esse valor é verificado fazendo semelhança de triângulos conforme a figura XX e confrontar os valores de Aristarco com os atuais, atualmente o valor aceito é cerca de 400 vezes.

Primeira questão: Sabendo que a distância da Terra ao Sol é aproximadamente 20 vezes a distância da Terra à Lua (de acordo com os cálculos de Aristarco, visto na atividade anterior) e que, na Figura 3.2, os triângulos $LL'T$ e $SS'T$ são semelhantes, determine quantas vezes o raio do sol é maior que o raio da lua.

Solução: Chamaremos SS’ de raio do sol e LL’ o raio da lua. Pela semelhança dos triângulos $LL'T$ e $SS'T$ temos a proporção $\frac{LL'}{SS'} = \frac{TL}{TS}$ e, do enunciado, $TS \approx 20\,TL$. Fazendo a substituição, temos $\frac{LL'}{SS'} \approx \frac{TL}{20\,TL}$, logo $SS' \approx 20\,LL'$.

Posteriormente a esses cálculos, o docente pode sugerir que seus alunos resolvam a mesma questão com valores mais atualizados. Segue abaixo uma proposta.

Segunda questão: Sabendo que, atualmente, se conhece que a distância da Terra ao Sol é aproximadamente 409 vezes a distância da Terra à Lua, determine como na atividade anterior, quantas vezes o raio do sol é maior que o da Lua.

Solução: Chamaremos *SS*' de raio do sol e *LL*' o raio da lua. Pela semelhança dos triângulos *LL*'*T* e *SS*'*T* temos a proporção $\frac{SS'}{LL'} = \frac{TS}{TL}$ e, do enunciado, $TS \approx 409\,TL$. Fazendo a substituição, temos $\frac{SS'}{LL'} \approx \frac{409\,TL}{TL}$, logo $SS' \approx 409\,LL'$.

Após obter a relação entre os raios da Terra e Sol, Aristarco também relacionou esses raios com o raio da Lua, usando sempre o raio da terra como uma unidade de medida. Para chegar nessas relações ele desenvolveu seu raciocínio através de um eclipse da lua, observando o cone de sombra da Terra. A (Figura 3.3) mostra um esboço, utilizando notação moderna de que Aristarco não dispunha, do Eclipse da Lua.

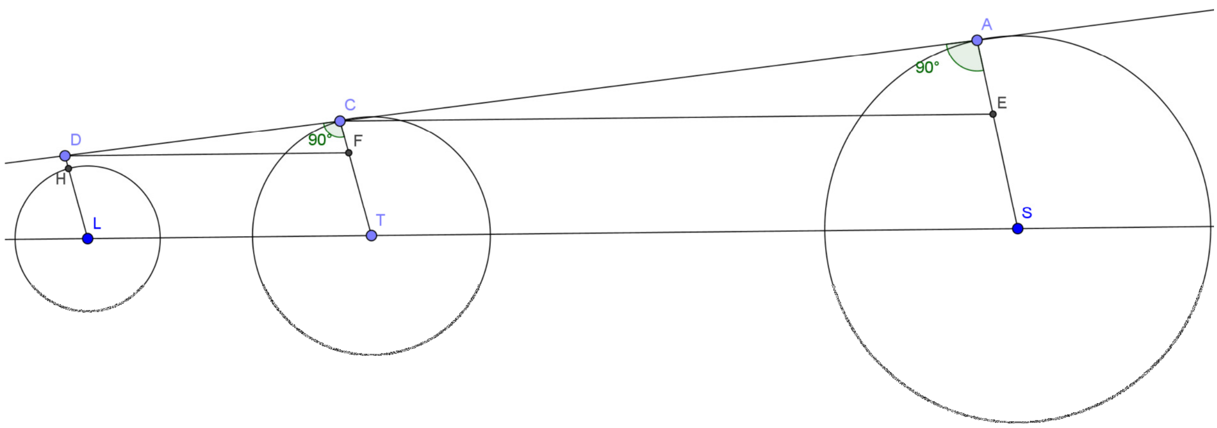


Figura 3.3 - Esquema de um eclipse lunar

Fonte: autor

Na Figura acima, *L, T* e *S* são os centros da Lua, da Terra e do Sol, respectivamente; $LH = R_L$, $TC = R_T$ e $SA = R_S$ são os respectivos raios. Esses raios são paralelos pois, por construção, *LD*, *TC* e *TA* são perpendiculares à reta DC. Temos *AC* tangente a circunferências de centro S e T. As medidas dos segmentos *LT* e *LS* são, respectivamente, as distâncias da Terra à Lua (D_{TL}) e da Terra ao Sol (D_{TS}).

Distâncias da Terra à Lua e ao Sol

Nas questões abaixo têm por objetivo determinar as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol em função do raio da terra. Da mesma forma que Aristarco fez a três séculos antes de Cristo.

Terceira questão: Sabendo que os segmentos *DF* e *CE* são paralelos à reta que passa pelos centros da Terra, da Lua e do Sol, na (figura 3.3):

(a) Qual a relação entre as medidas dos segmentos *DL* e *FT*?
(b) Qual a relação entre *DF* e a distância entre a Terra e a Lua (D_{TL})? Qual a relação entre *CE* e a distância entre a Terra e o Sol (D_{TS})?
(c) Explique por que os triângulos *DFC* e *CEA* são semelhantes. Que igualdade envolvendo as medidas de *CF*, *DF*, *AE* e *CE* pode ser obtida através desta semelhança?
(d) Como se pode escrever as medidas do segmento *AE* em função dos raios da Terra (R_T) e do Sol (R_S)?

Solução:

(a) Na figura temos que *DF* é paralelo a D_{TL} e os ângulos $DCF = CAE = 90°$. Temos também que os raios da Terra, Lua e Sol são paralelos, logo o quadrilátero *LTFD* é um paralelogramos e $DL = FT$.
(b) Como já sabemos que o quadrilátero *LTFD* é um paralelogramo temos que $DF = D_{TL}$ e de modo análogo ao item (a) temos que $CE = D_{TS}$.
(c) Da figura temos que os triângulos *DFC* e *CEA* são retângulos com ângulo reto nos vértices *C* e *A* respectivamente. Sendo R_T é paralelo a R_S os ângulos *DFC* e *CEA* são correspondentes, logo iguais. Temos aí um caso de semelhança entre os triângulos *DCF* e *CAE*. Pela razão de semelhança desses triângulos temos $\frac{CF}{DF} = \frac{AE}{CE}$. Onde $DF = D_{TL}$ e $CE = D_{TS}$
(d) Sabendo que *AS* é o raio do Sol (R_S) e o quadrilátero *CEST* é um paralelogramo temos que $ES = R_T$ (raio da Terra). Dá figura tiramos $AE = AS - ES$, logo $AE = R_S - R_T$.

Quarta questão: Observando o tempo gasto pela Lua para atravessar o cone de Luz da Terra, Aristarco concluiu que $LD = \frac{8\,R_L}{3}$. Sendo assim, como se pode escrever a medida do segmento *CF* em função das medidas do raio da Terra (R_T) e do raio da Lua (R_L)?

Solução: Como $CT = R_T = FT + CF$, logo $CF = R_T - \frac{8\,R_L}{3}$.

Quinta questão: Considere as razões extraídas da terceira questão $AE = R_S - R_T$ e $\frac{CF}{D_{TL}} = \frac{AE}{D_{TS}}$. Considere também a relação extraída da quarta questão $CF = R_T - \frac{8\,R_L}{3}$ e da primeira questão temos $\frac{R_L}{R_S} = \frac{D_{TL}}{D_{TS}}$, conclua com essas informações as medidas do raio da Lua, raio do Sol, distância da Terra ao Sol e a distância da Terra à Lua, em função do raio da Terra.

Solução: Introduziremos as constantes a e b com finalidade de simplificar o desenvolvimento da questão. Chamaremos $\frac{R_S}{D_{TS}} = a$ e $\frac{D_{TS}}{D_{TL}} = b$. Consequentemente $\frac{R_L}{D_{TL}} = a$. Como $\frac{CF}{D_{TL}} = \frac{AE}{D_{TS}}$. Substituindo AE e CF na proporção temos,

$$\frac{R_T - \frac{8\,R_L}{3}}{D_{TL}} = \frac{R_S - R_T}{D_{TS}}.$$

Do enunciado tiramos que $D_{TS} = bD_{TL}$, $R_S = aD_{TS} = abD_{TL}$, $R_L = aD_{TL}$, logo $\frac{R_T}{D_{TL}} - \frac{8}{3}\frac{R_L}{D_{TL}} = \frac{R_S}{D_{TS}} - \frac{R_T}{D_{TS}}$, de onde $\frac{R_T}{D_{TL}} - \frac{8a}{3} = a - \frac{1}{b}\frac{R_T}{D_{TL}}$, tirando em evidência $\frac{R_T}{D_{TL}}$ temos

$$\left(1 + \frac{1}{b}\right)\frac{R_T}{D_{TL}} = \frac{11a}{3},$$

donde

$$D_{TL} = \frac{3\,(b+1)R_T}{11\,ab}.$$

Portanto,

$$D_{TS} = b\,D_{TL} = \frac{3\,(b+1)R_T}{11\,a},$$

$$R_S = ab\,D_{TL} = \frac{3\,(b+1)R_T}{11},$$

$$R_L = a\,D_{TL} = \frac{3\,(b+1)R_T}{11\,b}.$$

Segundo Aristarco, $b = \frac{D_{TS}}{D_{TL}} = 20$ e para obter o parâmetro a ele teria de medir os lados SS' e TS no triângulo TSS', na figura 3.2, como o ângulo $S'TS$, é hoje conhecido temos $a = \frac{R_L}{D_{TS}} = sen\,(S'TS)$. Com isso:

$$D_{TL} \approx 16{,}8\,R_T,$$

$$D_{TS} \approx 337\,R_T,$$

$$R_S \approx 5{,}7\ R_T,$$

$$R_L \approx 0{,}29\ R_T.$$

Por outro lado, com valores mais corretos para os ângulos, obtemos os resultados bem mais próximos dos valores modernos: de sorte que a igualdade anterior pode ser escrita assim:

$$D_{TL} \approx 62\ R_T,$$

$$D_{TS} \approx 24855\ R_T,$$

$$R_S \approx 109\ R_T,$$

$$R_L \approx 0{,}27\ R_T.$$

4. Raio da Terra

Público Alvo

Alunos do 1° ano do Ensino que obtiveram em sua vida escolar base em proporções, perímetro de uma Circunferência e feixe de retas paralelas cortadas por retas transversais.

Objetivos Gerais

O objetivo desta atividade é guiar os alunos a construírem um raciocínio lógico, proporcionando conhecimento necessário sobre os conteúdos oferecidos de modo que sejam capazes de resolver problemas do dia-a-dia. Mostrar que a matemática interage com outras áreas do conhecimento, nesta atividade levaremos os alunos a relacionarem os conteúdos geométricos tais como: Proporção, Perímetro de uma Circunferência e ângulos alternos e internos de retas paralelas cortadas por uma transversal.

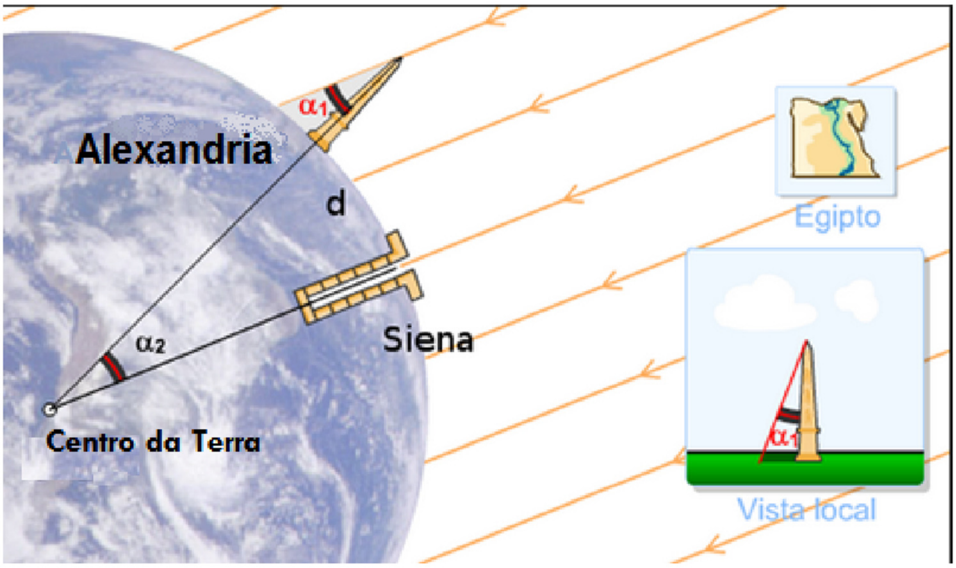
Objetivos Específicos

Através de questões ligadas a comprimento de circunferência, ao raio da Terra ângulos em retas paralelas, o aluno perceberá que conhecimentos de Geometria básica foram aplicados na Astronomia antiga. O discente, aqui, responderá questões que levarão ao resultado estimado por Erastóstenes para o raio da Terra e serão capazes de descobrir os resultados, fomentando um ensino por descoberta

O raio da terra foi medido por Erastóstenes no século III a.C., filósofo, astrônomo e matemático grego da escola de Alexandria. O método para seu cálculo baseou-se no Solstício de verão do hemisfério Norte, no dia 21 de junho, onde se tem o dia mais longo que a noite. Nesta data, os raios solares refletem perpendicularmente sobre o trópico de Câncer.

Erastóstenes soube que na cidade de Siena (atual Assuã, Egito, quase sobre o trópico de Câncer) a imagem do Sol podia ser vista refletida nos poços mais fundos. Isso significaria que, em Siena, ao meio-dia de 21 de junho os raios solares eram perpendiculares à superfície da Terra. Erastóstenes então mediu nas mesmas condições e observou que, em Alexandria, os raios solares caíam inclinadamente sob um ângulo de 7,2° em relação a um objeto perpendicular fixado no solo. O esquema da imagem abaixo retrata estas observações:

Figura 4.1 – Medindo o raio da Terra



Fonte:http://profeblog.es/blog/jcarpint/2012/09/16/%C2%BFcomo-midio-eratostenes-el-radio-dela-tierra/

Como $\alpha_1 = 7{,}2°$ e os raios solares são paralelos temos que $\alpha_1 = \alpha_2$. Sendo assim, podemos usar a proporção $\frac{C_{\text{Terra}}}{d} = \frac{360°}{7{,}2°}$. Onde ($C_{\text{Terra}}$) é o comprimento da terra e d a distância entre as cidades de Alexandria e Siena. Na época, a medida de comprimento usada era chamada *estádio* e a distância medida foi d = 5000 estádios (Colin, p. 125), que corresponde a 792 km, logo

$$\frac{C_{\text{Terra}}}{792} = \frac{360°}{7{,}2°},$$

e então

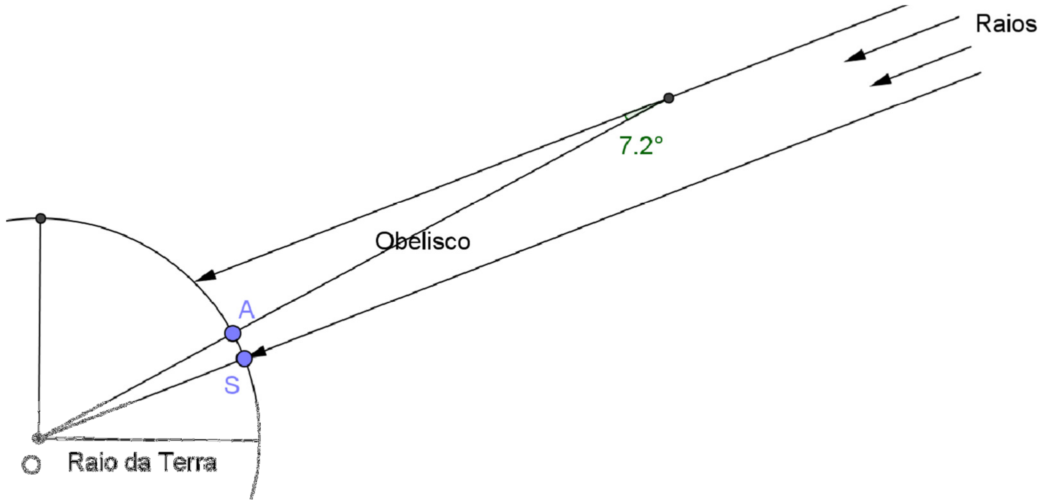
$$C_{\text{Terra}} = 39600 \text{ km}.$$

Como era sabido que $C_{\text{Terra}} = 2\pi r$, Erastóstenes concluiu que o raio da terra vale aproximadamente 6305 km. O valor obtido é bem significativo visto que o valor conhecido atualmente é 6378 km. Mas é pertinente notar que esse valor é uma aproximação de 5000 *estádios*, uma vez que os gregos utilizavam diferentes valores para a unidade *estádios*.

Medindo o Raio da Terra

Nas questões seguintes, considere uma circunferência de raio R, conforme a Figura 4.2 abaixo, sendo a distância entre os pontos A e S de, aproximadamente, 792 km. Um obelisco, localizado no ponto A, faz com um raio solar um ângulo de 7,2°.

Figura 4.2 – Esquema da medição do raio da Terra



Fonte: autor

Primeira questão: Considerando os raios solares paralelos, determine a medida do ângulo AOS.

Solução:

Sendo os raios solares paralelos temos que o ângulo AOS vale 7,2°, pois AOS e o ângulo conhecido entre o obelisco e o raio solar são alternos e internos, conforme a figura.

Segunda questão: Lembrando que a distância entre os pontos A e S é aproximadamente de 792 km, e que a medida do arco AS é de 7,2°, como calculado na Atividade 1, determine: (Considere $\pi = 3$)

a) O comprimento da circunferência
b) O raio R da circunferência.

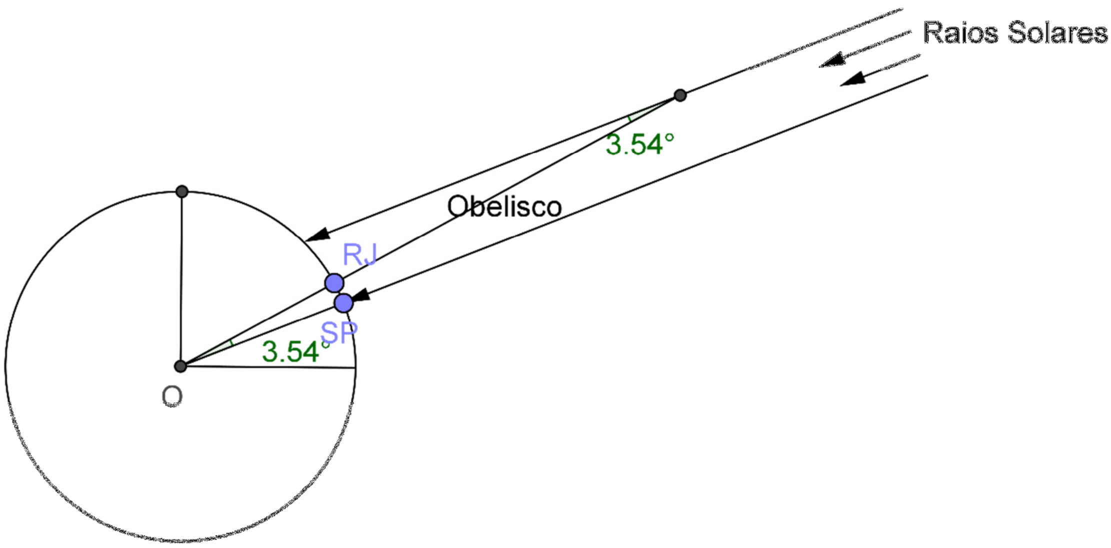
Solução:

a) Do enunciado temos que AS = 792 km, logo com uma simples proporção calculamos o comprimento da circunferência. Daí C = 39600.
b) Sabendo que $C = 2\pi r = 39600$ temos que o raio da circunferência é 6300 km.

Terceira questão: No dia 21 de dezembro, no Solstício de verão no Hemisfério Sul, os postes na cidade de São Paulo não possuem sombra quando o Sol está "a pino", o que ocorre aproximadamente às 12:00 (ou 13:00, no caso de horário de verão). Este fenômeno, bem conhecido na cidade, se dá pelo fato de São Paulo estar sobre o Trópico de Capricórnio. Neste mesmo instante, um objeto vertical no Centro do Rio de Janeiro, projeta uma sombra como representada abaixo sob um ângulo de 3,54°. Com base nestas informações e sabendo que o comprimento da linha do Trópico é de aproximadamente 36.816 km, qual a distância do Rio de Janeiro a São Paulo?

Solução: Pensando como no problema anterior, temos a Figura 4.3 abaixo:

Figura 4.3 – Distância Rio – São Paulo



Fonte: autor

Resolvendo por uma proporção simples, temos

$$\frac{36816\text{ km}}{d} = \frac{360°}{3{,}54°},$$

logo a distância do Rio a São Paulo é de aproximadamente 362 km.

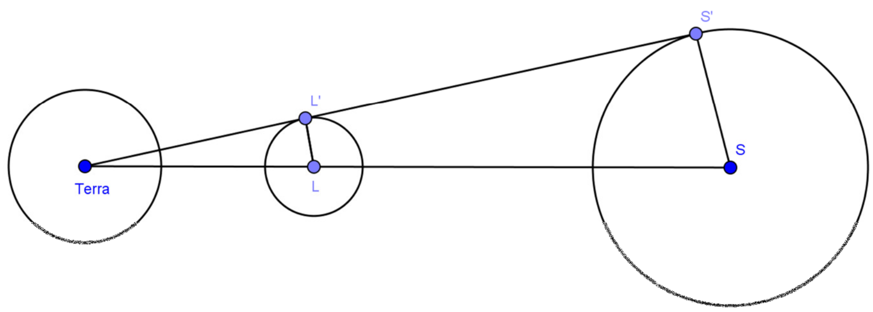
5. Eclipse solar e lunar para estimar a razão entre os raios do Sol e da Lua

Eclipse é um fenômeno raro, de complicada observação e interpretação, em que a Lua ou o Sol tem visões modificadas, tornando-se parcialmente ou totalmente obscuro. Já apreciado desde os povos mais antigos, as explicações para esse fenômeno provocaram mitos e lendas em quase todas as culturas. Ao longo da história, os eclipses serviram como instrumentos para averiguação de teorias, presságios ou até mesmo para a opressão de nações.

Hiparco de Nicéia, considerado um dos maiores astrônomos da Antiguidade ao observar o Eclipse total do Sol, que ocorreu em 190 a.C., concluiu que os diâmetros angulares da Lua e do Sol são iguais, observados por um observador terrestre. Baseado em alguns métodos que Aristarco afirmava há um século atrás, Hiparco os aperfeiçoou e aplicou com sabedoria. Temos então um modo diferente de determinar a razão entre os raios do Sol e da Lua como que foi feito no capítulo 3 por Aristarco. Só que agora temos uma precisão melhor nessas medidas.

Ao afirmar que o Sol e a Lua tinham o mesmo tamanho angular, ele concluiu que a razão entre o raio do Sol e da Lua é igual à razão entre as distâncias entre a Terra e a Lua e Terra e Sol. Observe a Figura 5.1 abaixo:

Figura 5.1 – Esquema de um Eclipse Solar

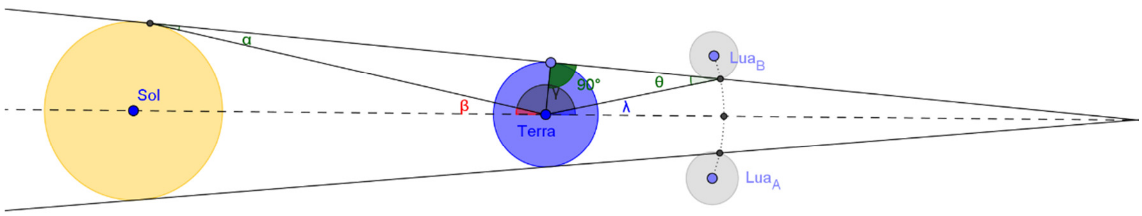


Fonte: autor

Observando a semelhança de triângulos retângulos $TL'L$ e $TS'S$ concluímos que $\frac{R_S}{R_L} = \frac{D_{TS}}{D_{TL}}$. Basta agora saber as distâncias da Terra à Lua e do Sol que teremos as estimativas dos raios.

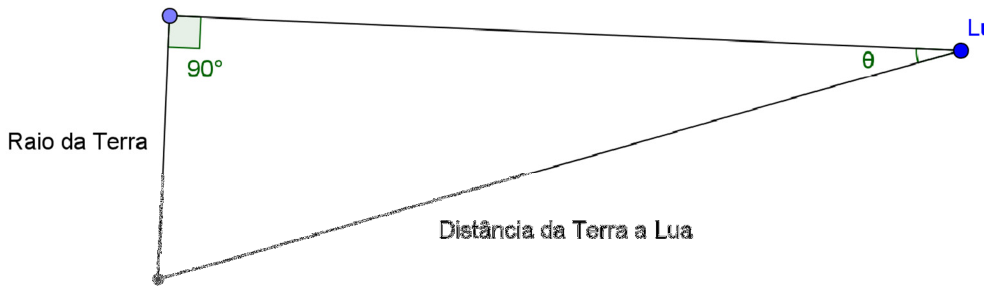
Para isso, utilizou um método, provavelmente idealizado por Aristarco de Samos, para medir a distância da Terra à Lua. Nele durante um eclipse total Lunar, construiu um esquema conforme a Figura 5.2, considere um suposto observador na órbita do cone de sombra da Lua que vê o raio da terra segundo um ângulo θ.

Figura 5.2 – Lua atravessando cone de sombra da Terra



Fonte: autor

Figura 5.3 – Triângulo Lua-Terra-Sol



Fonte: autor

Aplicando os conceitos da trigonometria no triângulo retângulo na Figura 5.3 acima, temos:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{R_T}{D_{TL}},$$

onde R_T é o raio da Terra e D_{TL} a distância entre a Terra e a Lua. Basta agora saber o ângulo θ, para determinar a relação entre o raio da terra e a distância da Terra à Lua. Vale salientar que Hiparco já dispunha de informações do raio da terra, calculado anteriormente por Erastóstenes. Voltando à Figura 5.2, concluiu-se que o ângulo $\theta \approx \lambda + \beta$, pois

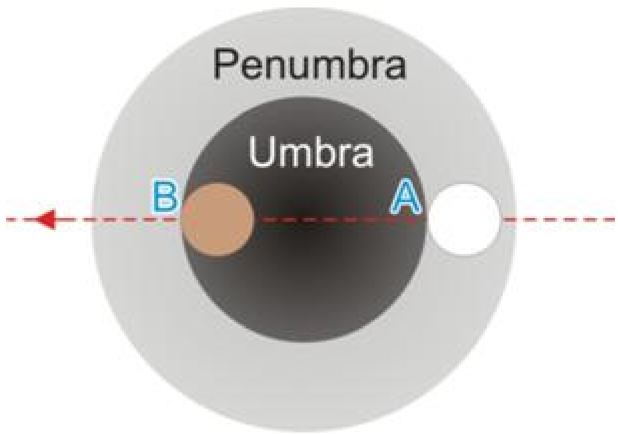
$$\theta + \alpha + \gamma = 180° \therefore \theta + \alpha = 180° - \gamma,$$

$$\beta + \gamma + \lambda = 180° \therefore \beta + \lambda = 180° - \gamma.$$

Igualando as equações, temos $\theta + \alpha = \beta + \lambda$. Como α é o ângulo dentro do qual um suposto observador situado no sol veria o raio da Terra e também é muito menor do que todos os outros ângulos indicados, Hiparco o desprezou obtendo assim $\theta \approx \lambda + \beta$, Onde β é o semidiâmetro angular do sol e λ é o semidiâmetro angular do cone de sombra da terra à distância da Lua.

O semidiâmetro angular do Sol é facilmente conhecido, por observação indireta, e é de aproximadamente 0,25º e já o semidiâmetro angular do cone de sombra da terra à distância da Lua, pôde ser obtido por Hiparco a partir da medida do intervalo de tempo (ΔAB, entre os instantes correspondentes às posições A e B), na Figura 5.4, durante o Eclipse.

Figura 5.4 – Penumbra e Umbra



Fonte: autor

Então, Hiparco calculou através de uma proporção esse semidiâmetro da seguinte forma:

$$\frac{29 \text{ dias}}{\Delta AB} = \frac{2\pi r}{2\lambda r},$$

logo

$$\lambda = \frac{\pi \, \Delta AB}{29}.$$

Note que 29 dias é o período de uma volta completa em torno da terra feita pela lua.

Com esses dados, Hiparco calculou a distância da Lua à Terra como sendo cerca de 59 a 67 raios terrestres. Atualmente, sabemos que a distância da Lua à Terra varia entre cerca de 57 e 64 raios terrestres.

A distância da Terra ao Sol fora calculada posteriormente através de novos eclipses do Sol e da Lua e se chegou ao resultado de 2500 vezes o raio da Terra, embora atualmente sabendo que essa distância é dez vezes menor, os resultados encontrados por Hiparco são muito melhores dos que já foram calculados.

De posse desses dados podemos, então, determinar a razão entre o raio do Sol e o da Lua.

6. Considerações Finais

Antes de concluirmos o trabalho, serão propostas mais duas questões, mostrando como o professor pode relacionar duas das atividades acima.

Relacionando atividades

Como podemos acompanhar na atividade do Capítulo 3, Aristarco calculou as distâncias da terra à Lua e Terra ao Sol, em função do Raio da Terra. Então, ele concluiu que:

$$D_{TL} \approx 16{,}8\ R_T,$$

$$D_{TS} \approx 337\ R_T,$$

$$R_S \approx 5{,}7\ R_T,$$

$$R_L \approx 0{,}29\ R_T.$$

Já na atividade do Capítulo 4, Erastóstenes, com sua brilhante ideia, determinou o valor aproximado do Raio da Terra, que era de $R_T = 6300$ km.

É natural que o professor faça uma associação entre as duas atividades, com o objetivo de mostrar aos alunos a importância de relacionar igualdades de informações. Atualmente uma das dificuldades dos discentes é saber lidar com esses dados de modo significativo. Então, nas questões abaixo, temos uma importante ferramenta de como mostrar aos alunos como podemos fazer tais associações.

Primeira questão: Relacionando as informações acima, calcule, em quilômetros:

(a) A distância Terra - Lua e Terra - Sol.
(b) Os raios da Lua e do Sol.

Solução:

(a) Sabendo que

$$D_{TL} \approx 16{,}8\ R_T,$$

$$D_{TS} \approx 337\ R_T,$$

e que o raio da terra é de 6300 km, temos que $D_{TL} = 105840$ km e $D_{TS} = 2.123.100$ km.

(b) O raio da Lua é vale $R_L = 0{,}29\ R_T$, logo $R_L = 1827$ km e o raio do Sol é igual a $R_S = 5{,}7\ R_T$, logo $R_S = 35910$ km.

Cabe ressaltar aqui que esses valores estão longe dos dias atuais, então propomos um cálculo mais correto.

Segunda questão: Com as medidas atuais, temos

$$D_{TL} \approx 62\ R_T,$$

$$D_{TS} \approx 24855\ R_T,$$

$$R_S \approx 109\ R_T,$$

$$R_L \approx 0{,}27\ R_T,$$

e R_T = 6371 km (raio médio). Determine a distância Terra - Lua e Terra - Sol? e os raios da Lua e do Sol?

Solução: Como as distâncias estão em função do raio e atualmente sabemos que o raio médio da esfera da terra é de 6371 km, as distâncias atuais, em km, são:

$$D_{TL} \approx 395.000 \text{ km},$$

$$D_{TS} \approx 158.351.200 \text{ km},$$

$$R_S \approx 694.439 \text{ km},$$

$$R_L \approx 1720 \text{ km}.$$

Algumas palavras

Neste trabalho, acreditamos ter apresentado uma forma de convencer os alunos da importância de conteúdos geométricos para o desenvolvimento de outras ciências. Acreditamos também ter mostrado que, na aula de Geometria, podemos ter um ambiente mais interessante na perspectiva de como usar alguns conceitos geométricos no cotidiano. Muitas vezes, as aulas de Geometria não são ministradas de forma a proporcionar, nos alunos, um amplo entendimento da materialidade dos conteúdos estudados. Temos então, neste trabalho, a oportunidade de estimular o desenvolvimento dos estudantes para um ensino de descobertas, proporcionando assim uma visão mais ampla da Matemática.

É muito interessante, ao resolver as questões propostas deste trabalho, ver a clareza de como conteúdos hoje tido como básicos se tornaram matéria-prima para grandes descobertas através de engenhosos raciocínios, assim como fizeram os Astrônomos Gregos. Acreditamos que o presente trabalho sirva como fonte inspiradora para desenvolvermos um ensino centrado na descoberta e criatividade do aluno. Ao propormos as questões aqui desenvolvidas nos capítulos anteriores em sala, o aluno poderá descobrir, por conta própria, como chegar a resultados que a séculos atrás os gregos fizeram.

Finalizando, esperamos que as reflexões aqui apresentadas possam servir de referência aos docentes que desejam repensar sua prática educacional. Precisamos formar jovens capazes de entender o significado da matemática na sala de aula, contribuindo assim, para uma educação cidadã e crítica, tão necessária nos dias atuais.

Referências Bibliográficas

ALARSA, F., Faria, R.P., Pimenta AP, Marino LAA, Oliveira RS, Cardoso WT. Fundamentos de Astronomia. Campinas: Editora Papirus, 1982.

KLEINER, Israel. Excursion in the Historyof Mathematics. Birkhauser, 2012.

COLIN A. Ronam, História Ilustrada da Ciência, vol 1. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2001.

BARBOSA, João L. M., Geometria Euclidiana Plana, coleção Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

DOLCE, Osvaldo, Fundamentos da Matemática Elementar, vol 9 (Geometria Plana), 7. ed [ver mais recente]. São Paulo: Atual: 1993.

ÁVILA, Geraldo. A Geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga.In: Minitério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Explorando o Ensino da Matemática. Atividades Volume II. Brasília, 2004. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_iicao1.pdf> Acesso em 04/2017.

NÁPOLES, Suzana; PALMA, Cândida; PINTO, Margarida. Medir o Tempo. https://www.spm.pt/medir_tempo_medir

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologia (PCN).

OLIVEIRA FILHO, Kepler de Souza; SARAIVA, Maria de Fátima Oliveira. Astronomia na Antiguidade. Disponível em: http://astro.if.ufrgs.br/antiga/antiga.htm, Acesso em 10/2016

SILVEIRA, Fernando Lang da; Centro de Referência para o Ensino da Física. Disponível em: https://www.if.ufrgs.br/cref/?area=questions&id=1016, Acesso em 01/2017

OLIVEIRA, Renato da Silva; Os Eclipses. Disponível em: http://www.asterdomus.com.br/Artigo_os_eclipses.htm, Acesso em 01/2017

Anexos A – Fases da Lua

Lua Nova	Lua Crescente	Lua Cheia	Lua Minguante
----	05 Jan 2017 - 16:47	12 Jan 2017 - 08:34	19 Jan 2017 - 19:13
27 Jan 2017 - 21:07	04 Fev 2017 - 01:19	10 Fev 2017 - 21:33	18 Fev 2017 - 16:33
26 Fev 2017 - 11:58	05 Mar 2017 - 08:32	12 Mar 2017 - 11:54	20 Mar 2017 - 12:58
27 Mar 2017 - 23:57	03 Abr 2017 - 15:39	11 Abr 2017 - 03:08	19 Abr 2017 - 06:57
26 Abr 2017 - 09:16	02 Mai 2017 - 23:47	10 Mai 2017 - 18:42	18 Mai 2017 - 21:33
25 Mai 2017 - 16:44	01 Jun 2017 - 09:42	09 Jun 2017 - 10:10	17 Jun 2017 - 08:33
23 Jun 2017 - 23:31	30 Jun 2017 - 21:51	09 Jul 2017 - 01:06	16 Jul 2017 - 16:26
23 Jul 2017 - 06:45	30 Jul 2017 - 12:23	07 Ago 2017 - 15:11	14 Ago 2017 - 22:15
21 Ago 2017 - 15:30	29 Ago 2017 - 05:13	06 Set 2017 - 04:03	13 Set 2017 - 03:25
20 Set 2017 - 02:30	27 Set 2017 - 23:53	05 Out 2017 - 15:40	12 Out 2017 - 09:25
19 Out 2017 - 16:12	27 Out 2017 - 19:22	04 Nov 2017 - 02:23	10 Nov 2017 - 17:36
18 Nov 2017 - 08:42	26 Nov 2017 - 14:03	03 Dez 2017 - 12:47	10 Dez 2017 - 04:51
18 Dez 2017 - 03:30	26 Dez 2017 - 06:20	-----	----

FONTE: http://www.iag.usp.br/astronomia/datas-de-mudanca-das-fases-da-lua

Anexo B – Razões Trigonométricas

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,017452	0,999848	0,017455
2°	0,034899	0,999391	0,034921
3°	0,052336	0,998630	0,052408
4°	0,069756	0,997564	0,069927
5°	0,087156	0,996195	0,087489
6°	0,104528	0,994522	0,105104
7°	0,121869	0,992546	0,122785
8°	0,139173	0,990268	0,140541
9°	0,156434	0,987688	0,158384
10°	0,173648	0,984808	0,176327
11°	0,190809	0,981627	0,194380
12°	0,207912	0,978148	0,212557
13°	0,224951	0,974370	0,230868
14°	0,241922	0,970296	0,249328
15°	0,258819	0,965926	0,267949
16°	0,275637	0,961262	0,286745
17°	0,292372	0,956305	0,305731
18°	0,309017	0,951057	0,324920
19°	0,325568	0,945519	0,344328
20°	0,342020	0,939693	0,363970
21°	0,358368	0,933580	0,383864
22°	0,374607	0,927184	0,404026
23°	0,390731	0,920505	0,424475
24°	0,406737	0,913545	0,445229
25°	0,422618	0,906308	0,466308
26°	0,438371	0,898794	0,487733
27°	0,453990	0,891007	0,509525
28°	0,469472	0,882948	0,531709
29°	0,484810	0,874620	0,554309
30°	0,500000	0,866025	0,577350
31°	0,515038	0,857167	0,600861
32°	0,529919	0,848048	0,624869
33°	0,544639	0,838671	0,649408
34°	0,559193	0,829038	0,674509
35°	0,573576	0,819152	0,700208
36°	0,587785	0,809017	0,726543
37°	0,601815	0,798636	0,753554
38°	0,615661	0,788011	0,781286
39°	0,629320	0,777146	0,809784
40°	0,642788	0,766044	0,839100
41°	0,656059	0,754710	0,869287
42°	0,669131	0,743145	0,900404
43°	0,681998	0,731354	0,932515
44°	0,694658	0,719340	0,965689
45°	0,707107	0,707107	1

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
46°	0,719340	0,694658	1,035530
47°	0,731354	0,681998	1,072369
48°	0,743145	0,669131	1,110613
49°	0,754710	0,656059	1,150368
50°	0,766044	0,642788	1,191754
51°	0,777146	0,629320	1,234897
52°	0,788011	0,615661	1,279942
53°	0,798636	0,601815	1,327045
54°	0,809017	0,587785	1,376382
55°	0,819152	0,573576	1,428148
56°	0,829038	0,559193	1,482561
57°	0,838671	0,544639	1,539865
58°	0,848048	0,529919	1,600335
59°	0,857167	0,515038	1,664279
60°	0,866025	0,500000	1,732051
61°	0,874620	0,484810	1,804048
62°	0,882948	0,469472	1,880726
63°	0,891007	0,453990	1,962611
64°	0,898794	0,438371	2,050304
65°	0,906308	0,422618	2,144507
66°	0,913545	0,406737	2,246037
67°	0,920505	0,390731	2,355852
68°	0,927184	0,374607	2,475087
69°	0,933580	0,358368	2,605089
70°	0,939693	0,342020	2,747477
71°	0,945519	0,325568	2,904211
72°	0,951057	0,309017	3,077684
73°	0,956305	0,292372	3,270853
74°	0,961262	0,275637	3,487414
75°	0,965926	0,258819	3,732051
76°	0,970296	0,241922	4,010781
77°	0,974370	0,224951	4,331476
78°	0,978148	0,207912	4,704630
79°	0,981627	0,190809	5,144554
80°	0,984808	0,173648	5,671282
81°	0,987688	0,156434	6,313752
82°	0,990268	0,139173	7,115370
83°	0,992546	0,121869	8,144346
84°	0,994522	0,104528	9,514364
85°	0,996195	0,087156	11,430052
86°	0,997564	0,069756	14,300666
87°	0,998630	0,052336	19,081137
88°	0,999391	0,034899	28,636253
89°	0,999848	0,017452	57,289962
90°	1	0	-