UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EXPLORANDO AS CÔNICAS DA GEOMETRIA DO TÁXI VIA GEOGEBRA

FÁBIO PINHEIRO PERGENTINO

Rio de Janeiro - RJ
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EXPLORANDO AS CÔNICAS DA GEOMETRIA DO TÁXI VIA GEOGEBRA

FÁBIO PINHEIRO PERGENTINO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática PROFMAT da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Xavier Penna

Rio de Janeiro - RJ
2020

Catalogação informatizada pelo(a) autor(a)

P439

Pergentino, Fábio Pinheiro
Explorando as Cônicas do Táxi via GeoGebra / Fábio Pinheiro Pergentino. -- Rio de Janeiro, 2020.
67 p.

Orientador: Fábio Xavier Penna.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020.

1. Geometria não euclidiana. 2. Geometria do Táxi. 3. Cônicas. 4. GeoGebra. I. Penna, Fábio Xavier, orient. II. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EXPLORANDO AS CÔNICAS DA GEOMETRIA DO TÁXI VIA GEOGEBRA

FÁBIO PINHEIRO PERGENTINO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática PROFMAT da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 17 de dezembro de 2020.

Membros da Banca:

Prof. Dr. Fábio Xavier Penna
(Orientador – CCET/UNIRIO)

Prof. Dr. Michel Cambrainha de Paula
(CCET/UNIRIO)

Profª. Drª. Christine Sertã Costa
(PUC-Rio)

Rio de Janeiro - RJ
2020

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me dar saúde e discernimento para fazer boas escolhas.

Aos meus pais, Fernando *(in memorian)* e Fátima Inês, por todo esforço dedicado a mim. Minha eterna gratidão.

Meu irmão querido e maior amigo Felipe *(in memorian),* pela parceria de vida.

Meus avós, Luiz e Laci, pelo carinho e amor. Muito obrigado.

Minha esposa, Daniela, que esteve ao meu lado durante todo processo. Você é peça fundamental nessa conquista. Obrigado pela paciência e compreensão. Te amo.

Dedico também meus agradecimentos ao corpo docente do curso de mestrado, em especial Prof. Dr. Fábio Xavier Penna, por acreditar no projeto e pelas ótimas orientações.

Aos meus colegas de curso, pela amizade construída e por trazerem leveza nos momentos difíceis.

"A Geometria existe por toda parte.

É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para

Compreendê-la e alma para admirá-la".

Johannes Kepler

RESUMO

Com o objetivo de aproximar o cotidiano da matemática, em específico da geometria, o estudo da Geometria do Táxi mostra ao aluno um conceito de distância diferente do aprendido na Geometria Euclidiana, mas semelhante ao conceito utilizado no nosso dia a dia ao caminhar pelas ruas. Por ser uma geometria não euclidiana, a Geometria do Táxi agrega ainda mais valor na complementação no ensino de matemática, pelo simples fato de não ser um assunto abordado no ensino básico. Com a ajuda do software de geometria dinâmica, GeoGebra, podemos ter um melhor entendimento das cônicas na Geometria do Táxi e assim explorar ainda mais suas definições. Partindo dessas definições, é apresentado nesse trabalho, um tratamento algébrico e geométrico para as três cônicas, obtendo resultados surpreendentes. Propusemos atividades didáticas que facilitam a abordagem do professor e o entendimento desses resultados pelos alunos.

Palavras-chave: Geometria não euclidiana; Geometria do Táxi; Cônicas; Educação, GeoGebra.

ABSTRACT

With the aim of bringing everyday life closer to mathematics, specially to geometry, the study of Taxicab Geometry presents the student with a different concept of distance from the one learned in Euclidean Geometry, but similar to the concept used in our daily lives when walking through the streets. As it is a non-Euclidean geometry, Taxi Geometry adds even more value in complementing mathematics teaching, simply because it is not a topic addressed in basic education. With the help of dynamic geometry software, Geogebra, we can have a better understanding of the conics in Taxi Geometry and thus further explore its definitions. Based on these definitions, an algebraic and geometric treatment for the three conics is presented in this work, obtaining surprising results. We proposed didactic activities that facilitate the teacher's approach and the understanding of these results by the students.

Keywords: Non-Euclidean Geometry; Taxicab Geometry; Education, GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

Introdução

Como ir de um ponto a outro numa cidade? Qual o menor caminho entre esses dois pontos andando pelas ruas? Perguntas simples como essas podem ser feitas numa aula de matemática no Ensino Básico com o objetivo de fazer o aluno pensar além da sala de aula. Mas a matemática ensinada no ensino básico é suficiente para responder tais perguntas?

Esta dissertação tem como objetivo apresentar a Geometria do Táxi alguns de seus incríveis resultados. Em específico este trabalho apresenta, didaticamente, as abordagens algébrica e geométrica das equações cônicas com destaque para visualização e interações dinâmicas produzidas com auxílio do software GeoGebra.

O trabalho está dividido em 4 partes. Na primeira, abordaremos um pouco da história de Euclides como o primeiro matemático a introduzir um método axiomático para a geometria plana. Para isso falaremos brevemente sobre seu livro "Os Elementos". Logo introduziremos uma breve discussão sobre o 5º postulado e seus desdobramentos quanto à sua negação. E ao fim, o método axiomático de Hilbert será abordado como complemento para melhor entendimento da Geometria do Táxi.

Em seguida, iremos introduzir a Geometria do Táxi com sua definição de distância, diferenciando-a da Geometria Euclidiana. Baseado nos Axiomas de Hilbert, mostraremos o porquê estamos falando de uma geometria não euclidiana.

Na terceira parte, iniciaremos com as definições das cônicas na Geometria do Táxi, tendo o software GeoGebra como instrumento de visualização para tais cônicas. Em seguida abordaremos um pouco da história das seções cônicas e a influência de Apolônio. Finalizaremos com a seguinte pergunta: é possível fazer seções cônicas na Geometria do Táxi da mesma maneira feita por Apolônio?

O trabalho é finalizado com atividades didáticas voltadas para o Ensino Fundamental e Médio, acerca das cônicas abordadas segundo a Geometria do Táxi.

Capítulo 1

UM POUCO DE HISTÓRIA

Neste capítulo abordaremos a importância de Euclides e seu livro "Os Elementos", na fundamentação da geometria pelos postulados e axiomas. Abordaremos também a criação de uma nova geometria com a negação do 5º postulado e por fim a importância da axiomática de Hilbert para a geometria euclidiana.

1.1 Euclides e os Elementos

Segundo Roque [8], sabemos muito pouco sobre a vida de Euclides de Alexandria, tendo inclusive evidências de outras obras, além dos *Elementos*. Os Elementos de Euclides são uma coleção de 13 livros publicados por volta do ano 300 A.C.

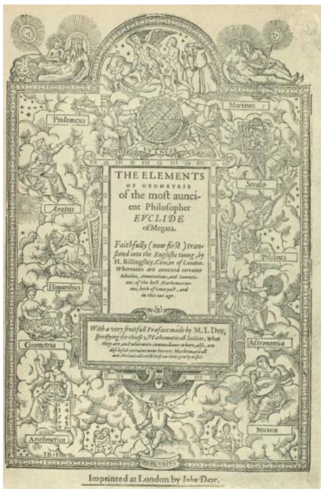


Figura 1.1 - Capa da primeira edição inglesa de Os Elementos (1570)
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Os_Elementos

Temos então, uma breve divisão dos livros dos elementos e suas abordagens em cada livro:

• Livro I: primeiros princípios e geometria plana de figuras retilíneas: construção e propriedades de triângulos, paralelismo, equivalência de áreas e teorema “de Pitágoras”.
• Livro II: contém a chamada “álgebra geométrica”, trata de igualdades de áreas de retângulos e quadrados.
• Livros III e IV: propriedades de círculos, como inscrever e circunscrever polígonos em círculos.
• Livro V: teoria das proporções de Eudoxo, razões entre grandezas de mesma natureza.
• Livro VI: aplicações do livro V à geometria, semelhança de figuras planas, aplicação de áreas.
• Livros VII a IX: estudo dos números naturais – proporções numéricas, números primos, maior divisor comum e progressões geométricas.
• Livro X: propriedades e classificação das linhas incomensuráveis.
• Livros XI a XIII: geometria sólida em três dimensões, cálculo de volumes e apresentação dos cinco poliedros regulares.

Logo no Livro I, Euclides inicia citando 23 definições em que procura deixar a compreensão dos objetos e termos, que terão suas propriedades estudadas e estabelecidas no decorrer de sua obra, de forma bem clara e precisa. Algumas definições elencadas por Euclides estão descritas a seguir com tradução de Irineu Bicudo:

> 1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
> 2. E linha é comprimento sem largura.
> 3. E extremidade de uma linha são pontos.
> 4. E uma linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma....
> 10. E quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou....
> 15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha, em relação à qual todas as retas que a encontram, a partir de um ponto dispostos no interior da figura, são iguais entre si.
> 16. E o ponto é chamado centro do círculo. (Bicudo, 2009, pg.97/98) [1]

Em seguida, Euclides escreve os postulados e axiomas delimitando assim as hipóteses que são utilizadas nas demonstrações dos teoremas e no desenvolvimento de toda a teoria. Os postulados e axiomas estabelecidos por Euclides, também por tradução de Irineu Bicudo, estão descritos a seguir:

> Postulados:
> 1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
> 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.

3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas, as duas retas, encontram-se no mesmo lado no qual estão os menores do que dois retos.

Axiomas ou Noções Comuns:
1. As coisas iguais às mesmas coisas são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, os restantes são iguais.
4. E, caso iguais sejam adicionados a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo é maior do que a parte.
9. E duas retas não contêm uma área.
(Bicudo, 2009, p.98/99) [1]

Euclides foi o primeiro matemático a apresentar a geometria de forma axiomática. Entretanto houve algumas imprecisões em seu texto. Após séculos, David Hilbert [1] elaborou um novo conjunto de axiomas para geometria, de forma a completar o trabalho de Euclides.

1.2 O 5º Postulado e sua negação

V Postulado. *A reta, caindo sobre as retas paralelas, faz tanto os ângulos alternos iguais entre si quanto o exterior igual ao interior e oposto e os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos.* (Bicudo, 2009, p.120) [1]

O quinto postulado do Livro I, como descrito acima, é o mais famoso dos postulados e trouxe mais desdobramentos para geometria.

[1] David Hilbert(23 de janeiro de 1862 – 14 de fevereiro de 1943) matemático alemão, um dos mais influentes matemáticos dos séculos 19 e 20. Contribuiu para os fundamentos da matemática moderna, em especial, a transformação da geometria euclidiana.

John Playfair [2] escreveu um enunciado equivalente:

Postulado das paralelas: Dada uma reta ℓ e um ponto P não pertencente a ℓ, existe uma e apenas uma reta passando por P e paralela a reta ℓ.

Ao longo dos anos, intrigados com o quinto postulado, grandes matemáticos pós-Euclides tentaram demonstrá-lo, achando que na verdade esse se tratava de um teorema e, como tal, poderia ser demonstrado por axiomas. No entanto, não obtiveram êxito nessa demonstração.

Foi então que, entre os séculos XVII e XVIII, o matemático italiano Girolamo Saccheri[3] tentou uma outra forma de provar o postulado das paralelas. Ele assumiu que o postulado das paralelas era falso e tentou chegar a contradições. Saccheri não chegou a nenhuma contradição, mas ao negar o quinto postulado abriu caminho para que matemáticos futuros pudessem enxergar uma nova geometria.

Foi só no século XIX que Gauss[4], Janos Bolyai[5], Bernard Riemann[6] e Nicolai Ivanovich Lobachevski[7] conseguiram demonstrar que se trata efetivamente de um axioma, necessário e independente dos outros. Eles supuseram que o postulado de Euclides não era verdadeiro e o substituíram por outros axiomas:

• Por um ponto exterior a uma reta, podemos traçar uma infinidade de paralelas a esta reta (Geometria Hiperbólica);

• Por um ponto exterior a uma reta não podemos traçar nenhuma paralela a esta reta (Geometria Elíptica).

A partir desta, chegaram à conclusão que estavam diante de duas geometrias diferentes da Geometria Euclidiana, que seguiam todo o método axiomático de

---

[2] John Playfair (10 de março de 1748 – 20 de julho de 1819) matemático e geólogo escocês. Foi o primeiro presidente do Instituo Astronômico de Edimburgo e professor de matemática e filosofia da Universidade de Edimburgo.

[3] Giovanni Girolamo Saccheri (5 de setembro de 1667 – 25 de outubro de 1733) foi um padre jesuíta e matemático italiano.

[4] Carl Friedrich Gauss (30 de abril de 1777 – 23 de fevereiro de 1855) matemático, astrônomo e físico alemão. Contribuiu em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, geometria diferencial, geodésia, geofísica, astronomia e óptica.

[5] Janos Bolyai (15 de dezembro de 1802 - 27 de janeiro de 1860) foi um matemático Húngaro, conhecido por seu trabalho em geometria não euclidiana.

[6] Bernard Riemann (17 de setembro de 1826 - 20 de julho de 1866) matemático alemão, com contribuições fundamentais para a análise e geometria diferencial.

[7] Nicolai Ivanovich Lobachevski (1 de dezembro de 1792 - 24 de fevereiro de 1856) foi um matemático russo e o primeiro a publicar uma descrição de uma geometria não euclidiana.

Euclides substituindo somente o quinto postulado. Entretanto, essa dissertação abordará outra geometria não euclidiana diferente das duas apresentadas anteriormente, que se difere da geometria euclidiana apenas no cálculo de distância entre dois pontos. Por ser baseada no percurso de um carro nas ruas de uma cidade planejada, a matemática se aproxima do dia a dia do estudante, de forma mais concreta e de fácil entendimento. Mas antes de perceber a Geometria do Táxi como não euclidiana, precisamos entender melhor o método axiomático de Hilbert.

1.3 Axiomática de Hilbert

Como visto na seção 1.1, Euclides foi o primeiro matemático a escrever a geometria de forma axiomática. Tempos depois, Hilbert elaborou um novo conjunto de axiomas separados por grupos, cada grupo com um conceito central. O objetivo de Hilbert era completar o trabalho de Euclides, trazendo um conjunto simples e completo de axiomas com um tratamento moderno, tornando assim a geometria euclidiana mais rigorosa e evitando assim diferentes interpretações como por exemplo no 5º Postulado.

Veremos a seguir os principais Axiomas da Geometria Euclidiana Plana propostos por Hilbert em seu livro [3].

Os cinco grupos de Axiomas

I. **Axiomas de Conexão**
   1. Para cada dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.
   2. Toda reta contém pelo menos dois pontos.
   3. Existem pelo menos três pontos que não pertencem a uma reta.

II. **Axiomas de Ordem**
   1. Se um ponto B está entre A e C, então os três pontos pertencem a uma mesma reta e B está entre C e A.

2. Para quaisquer dois pontos distintos A e C. Existe pelo menos um ponto B pertencente à reta $\overrightarrow{AC}$ tal que B está entre A e C.
3. Se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um ponto está entre os outros dois.
4. Quaisquer quatro pontos A, B, C e D de uma linha reta podem sempre ser dispostos de modo que B deve estar sempre entre A e C e também entre A e D, e, além disso, que C deve estar entre A e D e também entre B e D.
5. Sejam A, B e C três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja l uma reta do plano que contém algum dos três pontos. Então, se l intercepta o segmento $\overline{AB}$, ela também intercepta o segmento $\overline{AC}$ ou o segmento $\overline{BC}$.

III. Axioma das Paralelas

1. Axioma de Euclides: Seja l uma reta e A um ponto não em l. Então existe no máximo uma reta no plano que passa por A e não intercepta l.

IV. Axiomas de Congruência

1. Se A e B são dois pontos distintos numa reta l e A' é um outro ponto de uma reta l'. Não necessariamente distinta da anterior. Então é sempre possível encontrar um ponto B' em (um dado lado da reta) l', tais que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ sejam congruentes.
2. Se um segmento $\overline{A'B'}$ é um segmento $\overline{A''B''}$, são congruentes a um mesmo segmento $\overline{AB}$, então os segmentos $\overline{A'B'}$ e $\overline{A''B''}$ são congruentes entre si.
3. Sobre uma reta l, sejam $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ dois segmentos da mesma que, exceto por B não têm pontos em comum. Além disto, sobre uma outra ou a mesma reta l', sejam $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$ dois segmentos que, exceto por B' não têm pontos em comum. Neste caso se $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, então $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.

4. Se $\angle ABC$ é um triângulo e se $\overline{B'C'}$ é um raio, então existe exatamente um raio $\overline{A'B'}$ em cada lado $\overline{B'C'}$ tal que $\angle A'B'C' \equiv \angle ABC$. Além disso, cada ângulo é congruente a si mesmo.
5. Se para dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ as congruências $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ e $\angle BAC \equiv B'A'C'$ são válidas, então a congruência $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ é satisfeita.

V. Axiomas de Continuidade

1. Axioma de Arquimedes: Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos, então existe um número natural n tal que n cópias de $\overline{CD}$ construídas continuamente de A ao longo do raio $\overline{AB}$ passará além do ponto B.
2. Axioma da Completude da reta: Uma extensão de um conjunto de pontos sobre uma reta com suas relações de congruência e ordem que poderiam preservar as relações existentes entre os elementos originais, bem como as propriedades fundamentais de congruência e ordem que seguem dos axiomas acima (menos o das paralelas) é impossível.

Em um esforço semelhante ao de Hilbert, George David Birkhoff [8] apresentou axiomas que completavam o trabalho de Euclides, porém, o conseguiu fazer de forma menos extensa que Hilbert. Para uma melhor compreensão acerca dos axiomas de Birkhoff, sugerimos a leitura de uma de nossas referências, [7].

[8] George David Birkhoff(21 de março de 1884 – 12 de novembro de 1944) matemático estadunidense, mais conhecido pela elaboração do teorema ergódico.

Capítulo 2

GEOMETRIA DO TÁXI

Este capítulo apresenta os fundamentos matemáticos para a Geometria do Táxi, definindo sua métrica e explicando porque se trata de uma geometria não euclidiana. Abordaremos também uma aplicação na construção da circunferência táxi.

A Geometria do Táxi é baseada no formato quadriculado da ilha de Manhattan em Nova Iorque, por isso também possui outros nomes, sendo conhecida como "Métrica de Manhattan" e tem como precursor o matemático Hermann Minkowiski[9] responsável pela definição da métrica do táxi.

> *O termo Geometria do Táxi ou Taxicab Geometry surge pela primeira vez em 1952 quando Karl Menger em uma exibição no Museum of Science and Industry of Chicago apresenta um folheto com o nome You Will Like Geometry em que o termo Taxicab Geometry é usado. ([4], 2015, p. 185)*

De acordo com Krause [5], a geometria táxi se difere da geometria euclidiana apenas pela métrica. Na geometria euclidiana a distância entre dois pontos é dada pelo comprimento do segmento de reta que os une. Na geometria táxi a distância entre dois pontos, é obtida pela soma das medidas dos trajetos horizontais ou verticais. Por se tratar de uma geometria inspirada em um mapa com quarteirões exatamente iguais a um quadrado de mesma medida, utilizaremos o plano cartesiano como nosso mapa em que as linhas horizontais e verticais são as ruas da cidade.

[9] Hermann Minkowski (22 de junho de 1864 – 12 de janeiro de 1909) matemático alemão contemporâneo de Hilbert, criou e desenvolveu a geometria dos números que foi muito importante na resolução de problemas difíceis em Teoria dos Números, Física Matemática e Teoria da Relatividade.

2.1 Distância Táxi

Precisamos definir antes o conceito de espaço métrico para entender melhor a métrica euclidiana e em seguida a métrica do táxi.

Definição: Uma **métrica** é uma função $|PQ|$ definida para todo par de pontos P e Q do plano cartesiano, tal que:

1. $|\mathrm{PQ}| = 0 \text{ se } \mathrm{P} = \mathrm{Q};$
2. $|\mathrm{PQ}| > 0 \text{ se } \mathrm{P} \neq \mathrm{Q};$
3. $|\mathrm{PQ}| = |\mathrm{QP}|$
4. $|\mathrm{AC}| \leq |\mathrm{AB}| + |\mathrm{BC}|, \text{ para todo A, B e C no plano cartesiano.}$
   $(desigualdade\ triangular)$

<u>Métrica Euclidiana</u>

Na métrica euclidiana, a distância entre dois pontos é definida por um segmento de reta.

Seja o ponto P_1 com coordenadas (x_1, y_1) e o ponto P_2 com coordenadas (x_2, y_2) elementos do plano $\mathbb{R}^2$. Definimos a métrica D_E (distância euclidiana) como sendo $D_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Demonstração:

1. $P_1 = P_2$, então $D_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2} = \sqrt{0} = 0;$
2. $P_1 \neq P_2$, então $D_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} > 0$ pois $(x_1 - x_2)^2 > 0$ ou $(y_1 - y_2)^2 > 0;$
3. $D_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
   $= D_E(P_2, P_1);$
4. Seja $P_3(x_3, y_3)$ ponto do plano $\mathbb{R}^2$ então temos que provar que:

$$D_E(P_1, P_2) + D_E(P_2, P_3) \geq D_E(P_1, P_3)$$

$$D_E(P_1, P_2) + D_E(P_2, P_3)$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$$

$$\geq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (y_2 - y_3)^2}$$

$$\geq \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} = D_E(P_1, P_3) \square$$

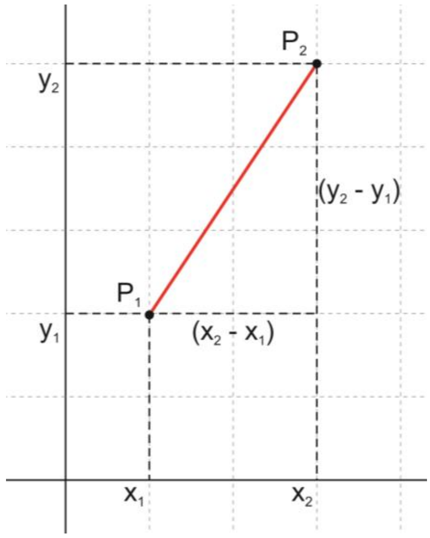


Figura 2.1.1 – Distância euclidiana.

Métrica do Táxi

A definição de espaço métrico também é verificada na métrica do táxi, porém com uma forma diferenciada de se calcular a distância. A táxi-distância entre dois pontos em um espaço euclidiano com sistema de coordenadas fixado, é a soma dos comprimentos das projeções do segmento de reta que liga os pontos sobre os eixos coordenados.

Seja o ponto P_1 com coordenadas (x_1, y_1) e o ponto P_2 com coordenadas (x_2, y_2) elementos do plano $\mathbb{R}^2$. Definimos a métrica D_T (táxi-distância) como sendo $D_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Demonstração:

1. $P_1 = P_2$, então $D_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_1| + |y_1 - y_1| = |0| + |0| = 0$;
2. $P_1 \neq P_2$, então $D_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| > 0$ pois $|x_1 - x_2| > 0$ ou $|y_1 - y_2| > 0$;
3. $D_T(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = D_E(P_2, P_1)$ pois $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$ e $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$;
4. Seja $P_3(x_3, y_3)$ ponto do plano $\mathbb{R}^2$ então temos que provar que:

$$D_T(P_1, P_2) + D_T(P_2, P_3) \geq D_T(P_1, P_3)$$

$$D_T(P_1, P_2) + D_T(P_2, P_3) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|$$

$$= |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|$$

$$\geq \left|(x_1 - x_2) + (x_2 - x_{3)}\right| + |(y_1 - y_2) + (y_2 - y_3)|$$

$$= |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| = D_E(P_1, P_3) \;\square$$

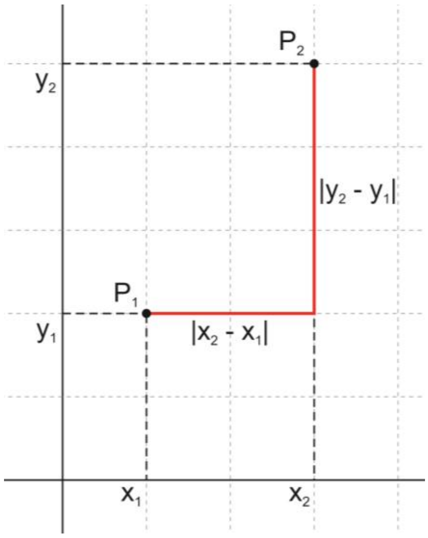


Figura 2.1.2 – Distância táxi.

A geometria do táxi satisfaz todos os axiomas de Hilbert exceto o axioma 5 do Grupo IV, no qual é abordada a congruência de triângulos pelo caso LAL (lado-ângulo-lado). Podemos gerar dois triângulos com dois lados de mesma medida e o ângulo formado por eles também de mesma medida e esses triângulos não serem congruentes.

Vamos observar melhor esse fato no exemplo abaixo:

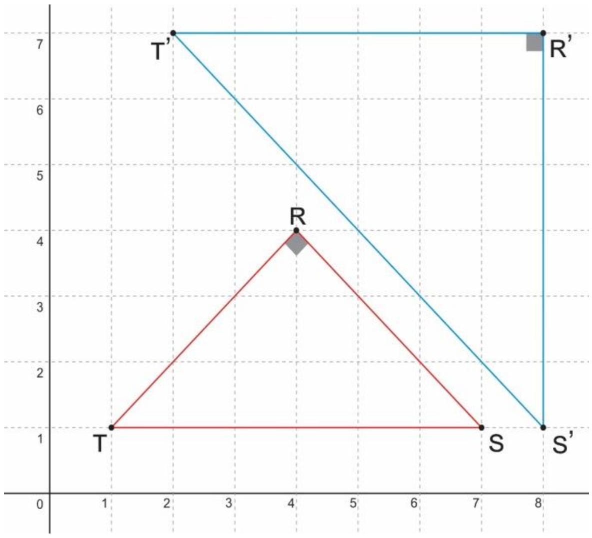


Figura 2.1.3 – Negação do caso LAL (congruência de triângulo).

Olhando para os triângulos RST e R'S'T', percebemos que os lados RT, RS, R'T' e R'S' têm a mesma medida segundo a métrica do táxi. Também podemos observar que os ângulos R e R' são congruentes. Com isso, temos um exemplo de dois triângulos nos quais o critério LAL é satisfeito na Geometria do Táxi, porém os triângulos não são congruentes. Demonstração retirada do artigo [4].

2.2 Táxi Circunferência

O conceito de circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão a uma mesma distância de um ponto fixo, que chamamos de centro da circunferência.

Seja C_E uma circunferência euclidiana, sendo O(a, b) o centro e P(x, y) um ponto qualquer em C_E, a distância de O a P é o raio r dessa circunferência. Então temos a seguinte equação:

$$C_E: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Seja C_T uma circunferência táxi, sendo O(a, b) o centro e P(x, y) um ponto qualquer em C_T, a distância de O a P é o raio r dessa circunferência. Então temos a seguinte equação:

$$C_T: |x-a| + |y-b| = r$$

Temos então as equações da circunferência no modelo euclidiano e no modelo do táxi. Entretanto, quando falamos em circunferência, o desenho que vem em nossas mentes, é o modelo euclidiano C_E: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

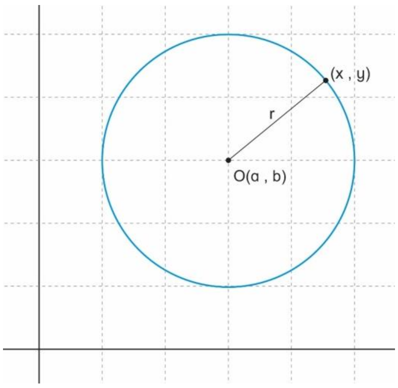


Figura 2.2.1 – Circunferência euclidiana(C_E).

Veremos agora como é o esboço da circunferência no modelo do táxi.

Vamos analisar a equação: $C_T\colon |x-a|+|y-b|=r$

Para $x<a$ e $y\geq b \rightarrow -x+a+y-b=r \rightarrow \boxed{y=x+(r-a+b)}$ (1)

Para $x\leq a$ e $y<b \rightarrow -x+a-y+b=r \rightarrow \boxed{y=-x+(-r+a+b)}$ (2)

Para $x>a$ e $y\leq b \rightarrow x-a-y+b=r \rightarrow \boxed{y=x+(-r-a+b)}$ (3)

Para $x\geq a$ e $y<b \rightarrow x-a+y-b=r \rightarrow \boxed{y=-x+(r+a+b)}$ (4)

Analisando os intervalos, podemos observar a formação das equações (1), (2), (3) e (4). Todas elas são equações de retas em que se cruzam perpendicularmente nos pares: (1) e (2), (2) e (3), (3) e (4), (4) e (1). Temos assim, a formação da circunferência táxi.

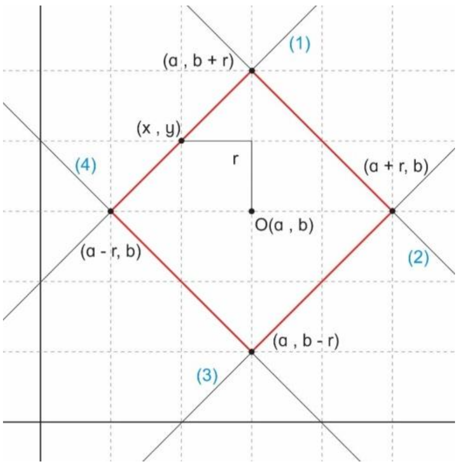


Figura 2.2.2 – Circunferência táxi(C_T).

Interessante notar que a circunferência táxi são quadrados com os lados orientados segundo um ângulo de 45º dos eixos.

Agora, veremos o que acontece ao transladar a equação da circunferência. Seja T a função translação dos pontos do plano $\mathbb{R}^2$.

T : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que T$(x,y)=(x-\alpha, y-\beta)$

Temos, $C_T\colon |x-a|+|y-b|=r$ centrada em (a,b).

Então, T$(C_T)\colon |x-\alpha-a|+|y-\beta-b|=r$

$|x-(\alpha+a)|+|y-(\beta+b)|=r$

$|x-\tilde{a}|+|y-\tilde{b}|=r$, em que $\tilde{a}=\alpha+a\ e\ \tilde{b}=\beta+b$ □

Podemos perceber que ao transladar a equação C_T centrada em (a,b), é mantido o raio da circunferência, modificando somente o seu centro.

2.2.1 Valor de π

Sabemos que na Geometria Euclidiana o valor de π é uma constante, que encontramos ao dividir o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro. Na Geometria do Táxi, vamos calcular o valor de π da mesma maneira mas chamaremos de π_t.

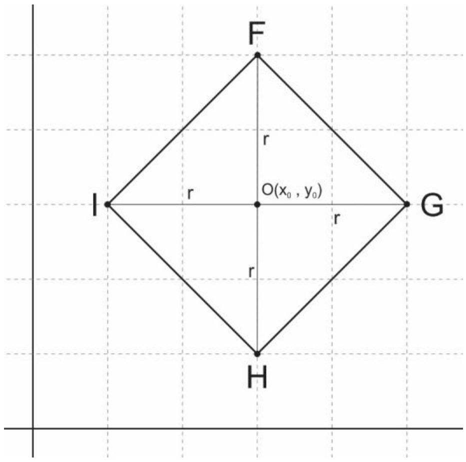


Figura 2.2.3 – Valor de π_t.

Seja $A(x_a, y_a) \in C_T$, $O(x_0, y_0)$ o centro da circunferência e $d_T(O,A) = r$ (raio). Podemos perceber na circunferência da figura 3.1 que, $d_T(O,I) = d_T(O,H) = d_T(O,G) = d_T(O,F) = r$ e usando a definição de distância da Geometria do Táxi, podemos afirmar que $d_T(I,F) = d_T(F,G) = d_T(G,H) = d_T(H,I) = 2r$.

Assim, temos que o comprimento da táxi circunferência será dado por $d_T(I,F) + d_T(F,G) + d_T(G,H) + d_T(H,I) = 8r$.

Como, π_t é o quociente entre o comprimento da circunferência táxi e o seu diâmetro, podemos escrever:

$$\pi_t = \frac{8r}{2r} = 4$$

Portanto, temos $\pi_t = 4$.

Capítulo 3

AS CÔNICAS NA GEOMETRIA DO TÁXI

Quando falamos nas cônicas, nos referimos a elipse, hipérbole e parábola. Todas as três eram conhecidas antes de Euclides (325 – 265 a.C.), que nos Elementos, destina uma seção para elas. Neste capítulo definiremos as cônicas na geometria euclidiana e na geometria do táxi. Usaremos como base o artigo [4].

3.1 Elipse

3.1.1 Elipse na Geometria Euclidiana

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, seja $2c$ a distância entre eles.

Elipse é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$, cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ $(2a > 2c)$.

Elipse = $\{P \in \mathbb{R}^2 | D_E(P, F_1) + D_E(P, F_2) = 2a\}$

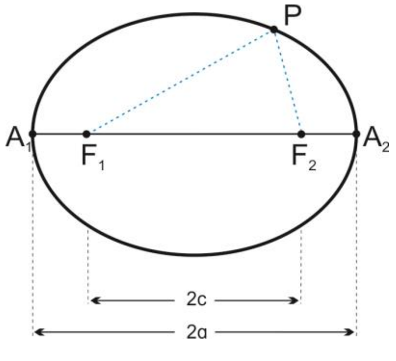
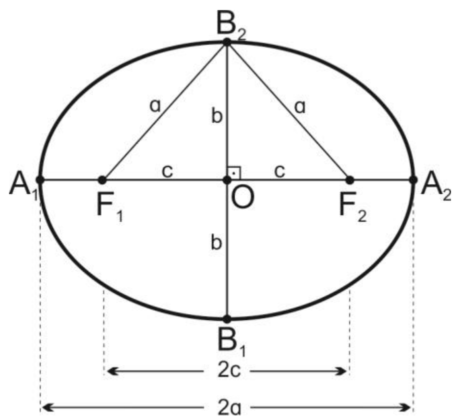


Figura 3.1.1 – Elipse euclidiana.

Tabela 1 – Elementos da Elipse

- Focos: os pontos F_1 e F_2 - Centro: o ponto O, que é o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$ - Semieixo maior: a - Semieixo menor: b - Semidistância focal: c - Vértices: os pontos A_1, A_2, B_1, B_2 - Eixo maior: $\lvert A_1A_2 \rvert = 2a$ - Eixo menor: $\lvert B_1B_2 \rvert = 2b$ - Distância focal: $\lvert F_1F_2 \rvert = 2c$ - Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$ -Relação notável: $a^2 = b^2 + c^2$	 Figura 3.1.2 – Elementos da Elipse euclidiana.

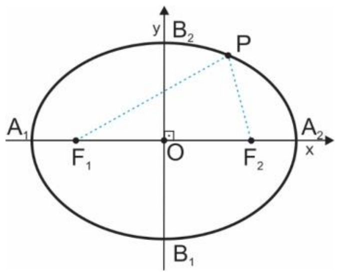
Equação reduzida

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal tal que A_1A_2 contido no eixo OX e B_1B_2 contido no eixo OY.

É claro que os focos são os pontos: $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Nestas condições, chama-se equação reduzida da elipse a equação que $P(x, y)$, ponto genérico da curva, vai verificar.

$$P \in elipse \Leftrightarrow PF_1 + PF_2 = 2a$$



Então:

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = (a^2 - cx)^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \square$$

3.1.2 Elipse na Geometria do Táxi

A definição da elipse na geometria do táxi é a mesma que vimos na geometria euclidiana, utilizando, porém, a distância táxi.

Tomemos então, os pontos $F_1(a,b)$, $F_2(c,d)$ e $P(x,y)$ e a constante $k \in \mathbb{R}$, logo.

Elipse no modelo do Táxi

$E_T = \{P \in \mathbb{R}^2 | D_T(P,F_1) + D_T(P,F_2) = 2k\}$ e $D_T(F_1,F_2) < 2k$

$E_T : |x-a| + |y-b| + |x-c| + |y-d| = 2k$

Como visto para circunferência, ao aplicarmos uma translação dos focos da elipse, obteremos uma elipse congruente.

Forma Canônica: Para obtermos um melhor entendimento da forma canônica de uma elipse, vamos separar em três casos.

1º Caso: Focos fora dos eixos, equidistantes e diametralmente opostos com relação a origem (0, 0).

2º Caso: Focos no eixo X e suas paralelas.

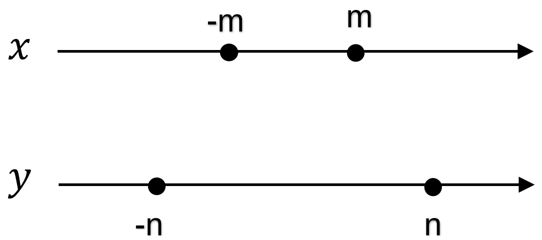
<u>3º Caso:</u> Focos no eixo Y e suas paralelas.

<u>1º Caso:</u> Dados os pontos $A(m,n)$ e $B(-m,-n)$ com $0 < m \leq n$. Encontre os pontos $P(x,y)$ do plano que atendem a equação: $D_T(P,A) + D_T(P,B) = c$ com $D_T(A,B) < c$.

Solução*:*

Nessas condições, temos que:

$|x - m| + |y - n| + |x + m| + |y + n| = c$



Para $x \leq -m$ e $y < -n \therefore -x + m - y + n - x - m - y - n = c \rightarrow \boxed{2x + 2y = -c}$ (a)

Para $x < -m$ e $-n \leq y < n \therefore -x + m - y + n - x - m + y + n = c \rightarrow \boxed{x = n - \frac{c}{2}}$ (b)

Para $x < -m$ e $y \geq n \therefore -x + m + y - n - x - m + y + n = c \rightarrow \boxed{-2x + 2y = c}$ (c)

Para $-m < x \leq m$ e $y < -n \therefore x - m - y + n - x - m - y - n = c$

$\rightarrow \boxed{y = -m - \frac{c}{2}}$ (d)

Para $-m < x < m$ e $-n \leq y < n \therefore x - m - y + n - x - m + y + n = c$

$\rightarrow \boxed{-2m + 2n = c}$ ($\nexists$ solução)

Para $-m < x < m$ e $y \geq n \therefore x - m + y - n - x - m + y + n = c \rightarrow \boxed{y = m + \frac{c}{2}}$ (e)

Para $x > m$ e $y \leq -n \therefore x - m - y + n + x + m - y - n = c \rightarrow \boxed{2x - 2y = c}$ (f)

Para $x > m$ e $-\mathrm{n} \leq y \leq n \therefore x - m - y + n + x + m + y + n = c \rightarrow \boxed{x = -n + \frac{c}{2}}$ (g)

Para $x > m$ e $y \geq n \therefore x - m + y - n + x + m + y + n = c \rightarrow \boxed{2x + 2y = c}$ (h)

Com todas as 8 equações definidas, podemos esboçar o gráfico da elipse na Forma Canônica (1º Caso).

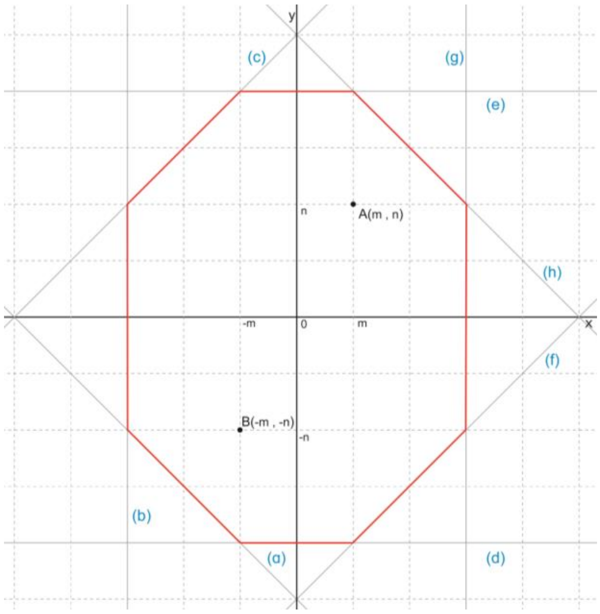


Figura 3.1.3 – Elipse na geometria do Táxi
(Forma canônica/1º Caso).

São mantidas 8 equações caso sejam aplicadas as seguintes funções:

- Seja T : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que T$(x,\ y) = (y,\ x)$

  Temos, T$(A) = (n, m)$ e T$(B) = (-n, -m)$ com $0 < m \leq n$.

- Seja W : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que W$(x,\ y) = (-\mathrm{x},\ \mathrm{y})$

  Temos, W$(A) = (-\mathrm{m}, \mathrm{n})$ e W$(B) = (\mathrm{m}, -\mathrm{n})$ com $0 < m \leq n$.

Podemos perceber que a elipse no modelo táxi é limitada por uma táxi circunferência de raio $\frac{c}{2}$ centrada na origem. Com isso, veremos nos próximos dois casos que ao colocar os focos nos eixos X e Y ou em suas paralelas, a elipse chegará em seus limites.

<u>2ºCaso:</u> Dados os pontos $A(m, 0)$ e $B(-m,\ 0)$ com $0 < m$. Encontrar os pontos $P(x, y)$ do plano que atendam a equação: $D_T(P, A) + D_T(P, B) = c$ com $D_T(A, B) < c$.

Com $n = 0$ a elipse chegará no seu limite horizontal, que são as retas $x = \frac{-c}{2}$ e $x = \frac{c}{2}$. Modificando assim seu formato para um hexágono.

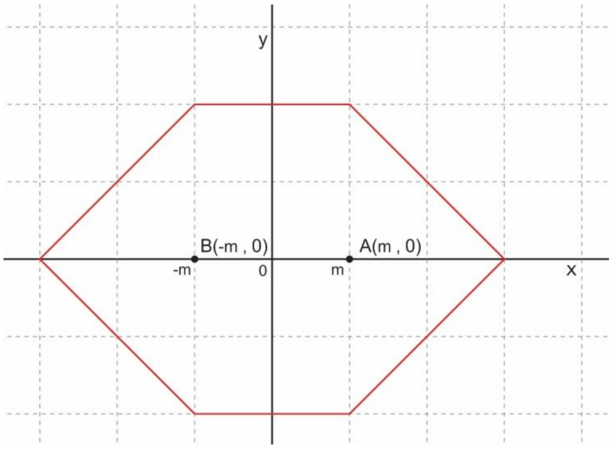


Figura 3.1.4 – Elipse na geometria do Táxi
(Forma canônica/2º Caso).

<u>3ºCaso:</u> Dados os pontos $A(0, n)$ e $B(0, -n)$ com $0 < n$. Encontre os pontos $P(x, y)$ do plano que atendem a equação: $D_T(P, A) + D_T(P, B) = c$ com $D_T(A, B) < c$.

Com $m = 0$ a elipse chegará no seu limite vertical, que são as retas $y = \frac{-c}{2}$ e $y = \frac{c}{2}$. Modificando assim seu formato para um hexágono.

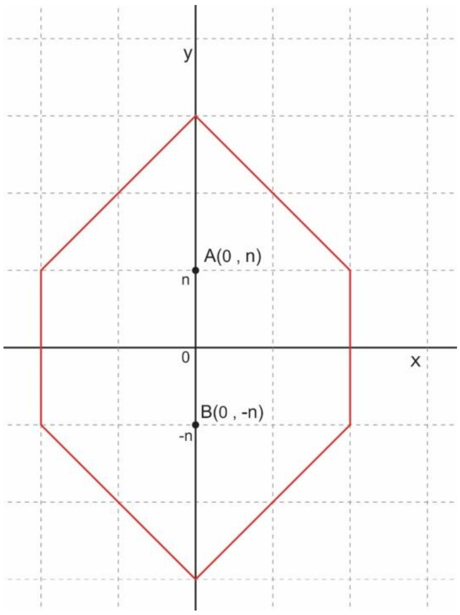


Figura 3.1.5 – Elipse na geometria do Táxi
(Forma canônica/3º Caso).

Utilizando o software Geogebra, podemos observar mais facilmente todos os casos acima descritos.

Acesse o QR Code e observe esse fato de forma dinâmica:

Link: https://www.geogebra.org/m/jn8derbz

Usaremos um exercício para exemplificar como se dá a construção de uma elipse na geometria do táxi.

Exemplo: Dados os pontos $A(-2,-1)$ e $B(2,2)$, encontre os pontos $P(x,y)$ do plano que atendem a equação: $D_T(P,A) + D_T(P,B) = 9$

Solução:

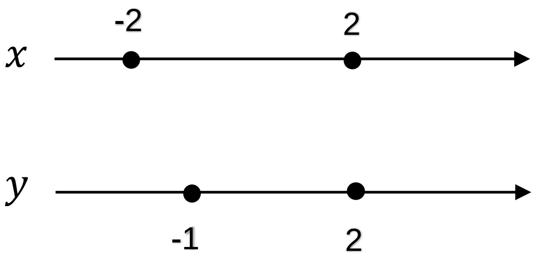
$D_T(A,B) < 9$

$D_T(A,B) = |2-(-2)| + |2-(-1)| = |2+2| + |2+1| = 7$

Logo, como $7 < 9 \rightarrow \boxed{D_T(A,B) < 9}$

Nessas condições, temos que:

$|x+2| + |y+1| + |x-2| + |y-2| = 9$



Para $x \leq -2$ e $y < -1 \therefore -x-2-y-1-x+2-y+2 = 9 \rightarrow \boxed{x+y=-4}$ (a)

Para $x < -2$ e $-1 \leq y < 2 \therefore -x-2+y+1-x+2-y+2 = 9 \rightarrow \boxed{x=-3}$ (b)

Para $x < -2$ e $y \geq 2 \therefore -x-2+y+1-x+2-y+2 = 9 \rightarrow \boxed{-x+y=5}$ (c)

Para $-2 < x \leq 2$ e $y < -1 \therefore x+2-y-1-x+2-y+2 = 9 \rightarrow \boxed{y=-2}$ (d)

Para $-2 < x < 2$ e $-1 \leq y < 2 \therefore x+2+y+1-x+2-y+2 = 9 \rightarrow \boxed{7=9}$ ($\nexists$ solução)

Para $-2 < x < 2$ e $y \geq 2 \therefore x+2+y+1-x+2+y-2 = 9 \rightarrow \boxed{y=3}$ (e)

Para $x > 2$ e $y \leq -1 \therefore x+2-y-1+x-2-y+2 = 9 \rightarrow \boxed{x-y=4}$ (f)

Para $x > 2$ e $-1 \leq y \leq 2 \therefore x+2+y+1+x-2-y+2 = 9 \rightarrow \boxed{x=3}$ (g)

Para $x > 2$ e $y \geq 2 \therefore x+2+y+1+x-2+y-2 = 9 \rightarrow \boxed{x+y=5}$ (h)

Com todas as equações definidas, podemos esboçar o gráfico da elipse no modelo do Táxi.

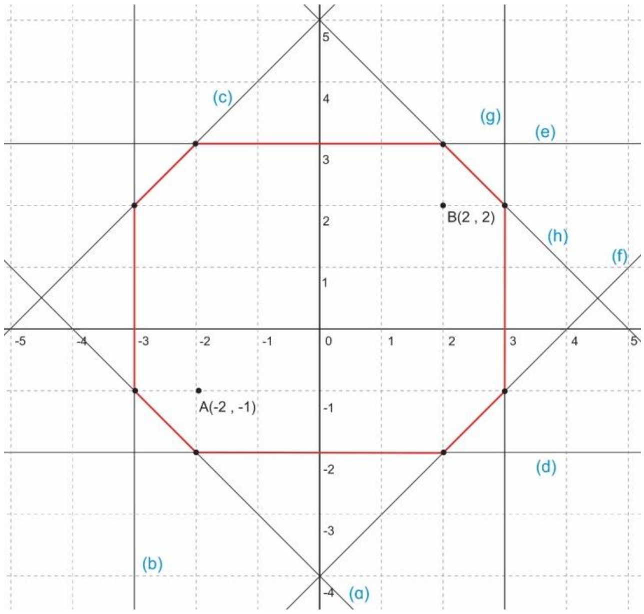


Figura 3.1.6 – Elipse na geometria do Táxi.

3.2 Parábola

3.2.1 Parábola na Geometria Euclidiana

Dados um ponto F e uma reta d, pertencentes a um plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, com $F \notin d$, seja p a distância entre F e d.

Parábola é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ que estão a mesma distância de F e d.

Parábola = $\{P \in \mathbb{R}^2 | D_E(P, F) = D_E(P, d)\}$

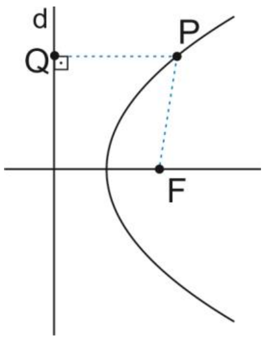
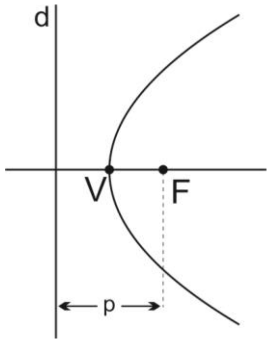


Figura 3.2.1 – Parábola euclidiana.

Tabela 2 – Elementos da Parábola

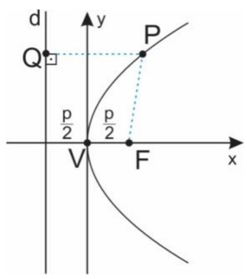
- Foco: F - Diretriz: d - Parâmetro: p - Vértice: V - Eixo de simetria: reta VF	 Figura 3.2.2 – Elementos da Parábola euclidiana.

Equação reduzida

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal com origem no vértice da parábola e eixo das abscissas passando pelo foco. É evidente que o foco é $F(\frac{p}{2}, 0)$ e a diretriz d tem equação $x = -\frac{p}{2}$

Nestas condições, chama-se equação reduzida da parábola a equação que $P(x, y)$, ponto genérico da curva, vai verificar.

$$P \in parábola \Leftrightarrow PF = PQ$$



Então:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + (y-y)^2}$$

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$y^2 = 2px \ \square$$

3.2.2 Parábola na Geometria do Táxi

A parábola em especial, tem em sua definição um conceito que precisamos entender melhor nessa geometria, que é o cálculo da distância entre um ponto e uma reta.

Definição: Dado o ponto $\mathrm{P}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ e a reta $\mathrm{r}: \mathrm{ax} + \mathrm{by} + \mathrm{c} = 0$, na geometria do táxi temos que a distância de P à reta r é dada por:

$$D_T(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{Máx\{|a|, |b|\}}$$

Para uma melhor compreensão acerca da demonstração dessa fórmula, sugerimos a leitura de uma de nossas referências, [4]. Com isso, podemos definir a parábola na geometria do táxi.

Tomemos então, o ponto $F(a, b)$ e a reta $d : mx + ny + c = 0$. Os pontos $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que a igualdade $D_T(P, F) = D_T(P, d)$ é verificada.

Parábola no modelo do Táxi

$$P_T = \{P \in \mathbb{R}^2 | D_T(P, F) = D_T(P, d)\}$$

$$P_T : |x - a| + |y - b| = \frac{|mx + ny + c|}{Máx\{|m|, |n|\}}$$

Forma Canônica: Para obtermos um melhor entendimento da forma canônica de uma parábola, vamos separar em quatro casos.

1º Caso: Reta diretriz paralela ao eixo das abscissas.

2º Caso: Reta diretriz paralela ao eixo das ordenadas.

3º Caso: Reta diretriz paralela à reta x=y.

4º Caso: Reta diretriz diferente das anteriores.

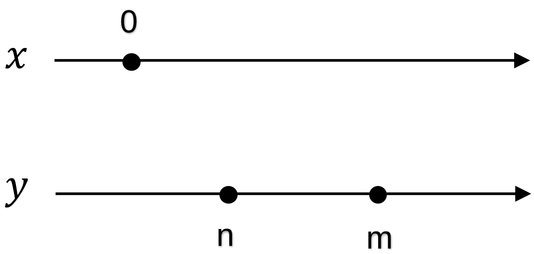
1º Caso: Dados o ponto $A(0, m)$ e a reta $r : y = n$ com $0 < n < m$. Encontre os pontos $P(x, y)$ do plano que atendem a equação: $D_T(P, A) = D_T(P, r)$

Solução:

Podemos ver claramente que $A \notin r$.

Nessas condições, temos que:

$|x| + |y - m| = |y - n|$



Para $x < 0$ e $y < n \therefore -x - y + m = -y + n \rightarrow \boxed{x = m - n}$ (não é solução)

Para $x < 0$ e $n \leq y < m \therefore -x - y + 2 = y - n \rightarrow \boxed{2y + x = m + n}$ (a)

Para $x < 0$ e $y \geq m \therefore -x + y - m = y - n \rightarrow \boxed{x = n - m}$ (b)

Para $x \geq 0$ e $y < n \therefore x - y + m = -y + n \rightarrow \boxed{x = n - m}$ (não é solução)

Para $x \geq 0$ e $n \leq y < m \therefore x - y + m = y - n \rightarrow \boxed{2y - x = m + n}$ (c)

Para $x \geq 0$ e $y \geq m \therefore x + y - m = y - n \rightarrow \boxed{x = m - n}$ (d)

Com todas as equações definidas, podemos esboçar o gráfico da parábola na Forma Canônica.

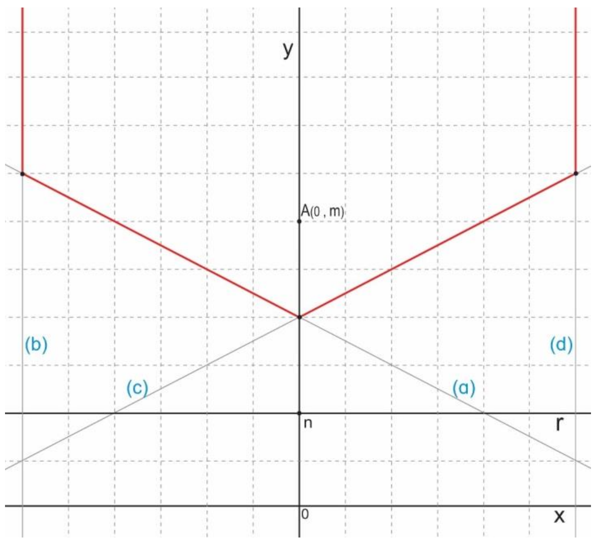


Figura 3.2.3 – Parábola na geometria do Táxi
(Forma canônica/1º Caso).

<u>2º Caso:</u> Dados o ponto $A(m, 0)$ e a reta $r:\ x = n$ com $0 < n < m$. Encontre os pontos $P(x, y)$ do plano que atendem a equação: $D_T(P, A) = D_T(P, r)$.

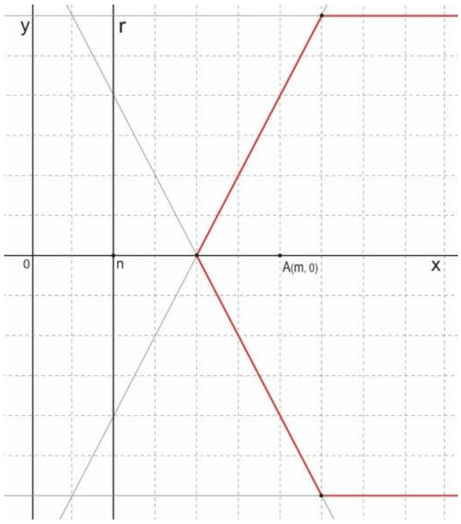


Figura 3.2.4 – Parábola na geometria do Táxi
(Forma canônica/2º Caso).

3º Caso: Dados o ponto $A(m, -n)$ e a reta $r : \ y = x$ com $0 < n < m$. Encontre os pontos $P(x, y)$ do plano que atendem a equação: $D_T(P, A) = D_T(P, r)$

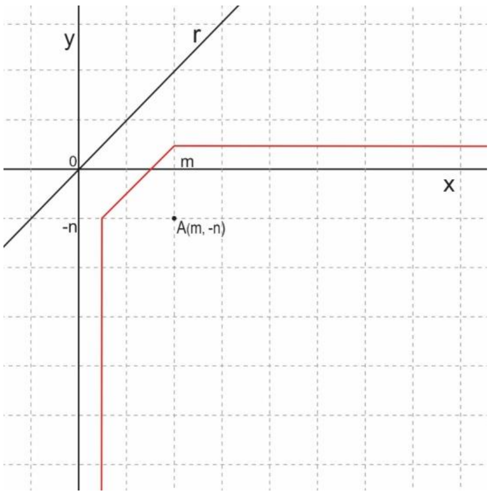


Figura 3.2.5 – Parábola na geometria do Táxi
(Forma canônica/3º Caso).

4º Caso: Dados o ponto $A(m, -n)$ e a reta $r : \ y = cx$ com $0 < n < m$ e $\{c \in \mathbb{R}^*/c \neq 1\}$. Encontre os pontos $P(x, y)$ do plano que atendem a equação: $D_T(P, A) = D_T(P, r)$

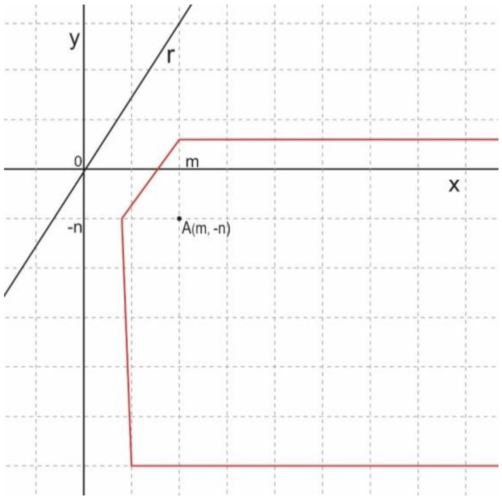


Figura 3.2.6 – Parábola na geometria do Táxi
(Forma canônica/4º Caso).

Utilizando o software Geogebra, podemos observar mais facilmente todos os casos acima descritos.

Acesse o QR Code e observe esse fato de forma dinâmica:

Link: https://www.geogebra.org/m/q38b5twm

Abaixo temos um exemplo numérico para ilustrar a construção de uma parábola na geometria do táxi.

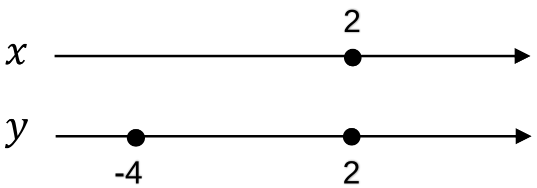
Exemplo: Dados o ponto $A(2, 2)$ e a reta $r: \; y = -4$, encontre os pontos $P(x, y)$ do plano que atendem a equação: $D_T(P, A) = D_T(P, r)$

Solução:

Podemos ver claramente que $A \notin r$.

Nessas condições, temos que:

$|x - 2| + |y - 2| = |y + 4|$



Para $x < 2$ e $y < -4 \therefore -x - 2 - y + 2 = -y - 4 \rightarrow \boxed{x = 8}$ (não é solução)

Para $x < 2$ e $-4 \leq y < 2 \therefore -x - 2 - y + 2 = y + 4 \rightarrow \boxed{2y + x = 0}$ (a)

Para $x < 2$ e $y \geq 2 \therefore -x - 2 + y - 2 = y + 4 \rightarrow \boxed{x = -4}$ (b)

Para $x \geq 2$ e $y < -4 \therefore x + 2 - y + 2 = -y - 4 \rightarrow \boxed{x = -4}$ (não é solução)

Para $x \geq 2$ e $-4 \leq y < 2 \therefore x + 2 - y + 2 = y + 4 \rightarrow \boxed{2y - x = 4}$ (c)

Para $x \geq 2$ e $y \geq 2 \therefore x - 2 + y - 2 = y + 4 \rightarrow \boxed{x = 8}$ (d)

Com todas as equações definidas, podemos esboçar o gráfico da parábola no modelo do Táxi.

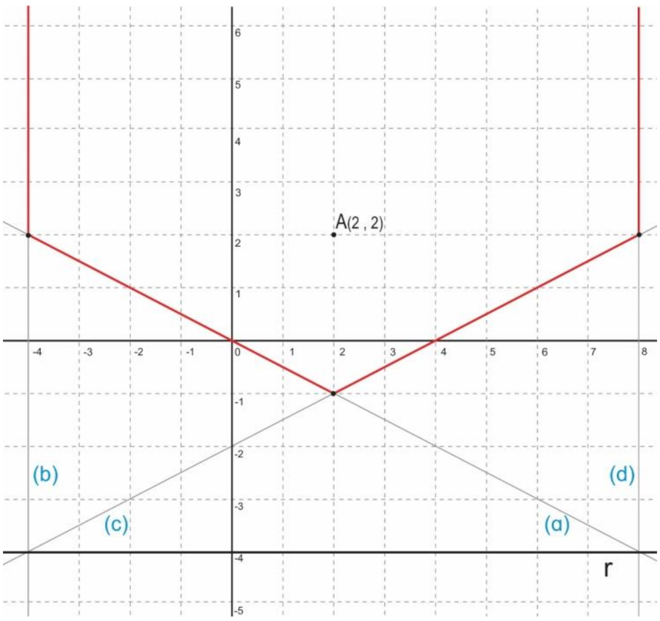


Figura 3.2.7 – Parábola na geometria do Táxi.

3.3 Hipérbole

3.3.1 Hipérbole na Geometria Euclidiana

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2, pertencentes a um plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, seja $2c$ a distância entre eles.

Hipérbole é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ $(0 < 2a < 2c)$.

Hipérbole = $\{P \in \mathbb{R}^2 | |D_E(P, F_1) - D_E(P, F_2)| = 2a\}$

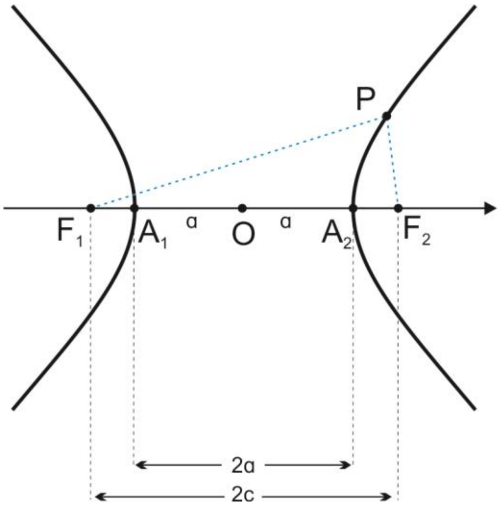
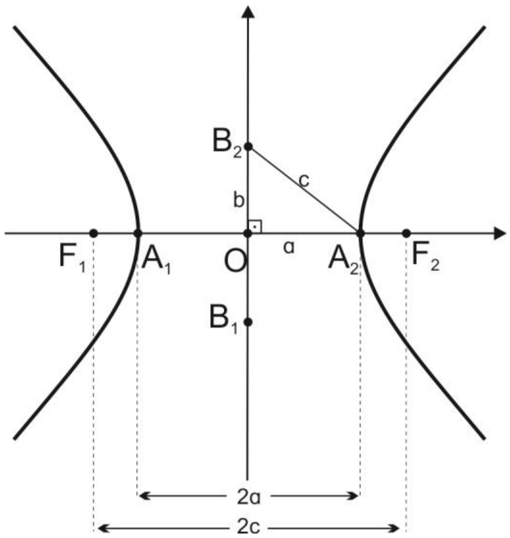


Figura 3.3.1 – Hipérbole euclidiana.

Tabela 3 – Elementos da Hipérbole

- Focos: os pontos F_1 e F_2 - Centro: o ponto O, que é o ponto médio de $\overline{A_1A_2}$ - Semieixo real: a - Semieixo imaginário: b - Semidistância focal: c - Vértices: os pontos A_1, A_2 - Eixo real: $\lvert A_1A_2\rvert = 2a$ - Eixo imaginário: $\lvert B_1B_2\rvert = 2b$ - Distância focal: $\lvert F_1F_2\rvert = 2c$ - Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$ -Relação notável: $c^2 = a^2 + c^2$	 Figura 3.3.2 – Elementos da Hipérbole euclidiana.

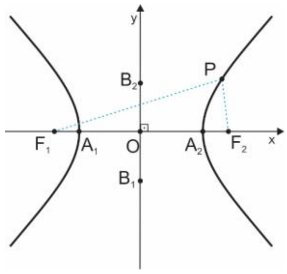
<u>Equação reduzida</u>

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal tal que A_1A_2 contido no eixo OX e B_1B_2 contido no eixo OY.

É claro que os focos são os pontos: $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Nestas condições, chama-se equação reduzida da elipse a equação que $P(x, y)$, ponto genérico da curva, vai verificar.

$P \in hipérbole \Leftrightarrow |PF_1 - PF_2| = 2a$



Então:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(cx - a^2)^2 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - -2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \square$$

3.3.2 Hipérbole na Geometria do Táxi

A definição da hipérbole na geometria do táxi é a mesma que vimos na geometria euclidiana, utilizando, porém, a distância táxi.

Tomemos então, os pontos $F_1(a, b)$, $F_2(c, d)$ e $P(x, y)$ e a constante $k \in \mathbb{R}$, logo.

<u>Hipérbole no modelo do Táxi</u>

$H_T = \{P \in \mathbb{R}^2 | |D_T(P, F_1) - D_T(P, F_2)| = 2k\}$ e $D_T(F_1, F_2) > 2k$

$H_T : \big||x-a| + |y-b| - (|x-c| + |y-d|)\big| = 2k$

Como visto para circunferência, ao aplicarmos uma translação dos focos da elipse, obteremos uma hipérbole congruente.

Forma Canônica: Para obtermos um melhor entendimento da forma canônica de uma hipérbole, vamos separar em três casos.

1º Caso: Focos fora dos eixos, equidistantes e diametralmente opostos com relação a origem (0, 0).

a) $n - m < \frac{c}{2}$

b) $n - m > \frac{c}{2}$

c) $n - m = \frac{c}{2}$

2º Caso: Focos no Eixo X e em suas paralelas.

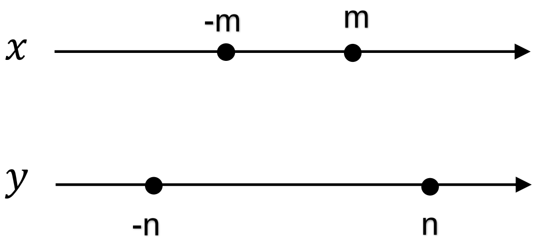
3º Caso: Focos no Eixo Y e em suas paralelas.

1º Caso (a): Dados os pontos $A(m, n)$ e $B(-m, -n)$ com $0 < m \leq n$. Encontre os pontos $P(x, y)$ do plano que atendem a equação: $|D_T(P, A) - D_T(P, B)| = c$ com $D_T(A, B) > c$ e $n - m < \frac{c}{2}$.

Solução:

Nessas condições, temos que:

$\big||x - m| + |y - n| - |x + m| - |y + n|\big| = c$



Para $x \leq -m$ e $y \leq -n \therefore |-x + m - y + n - (-x - m) - (-y - n)| = c \rightarrow$

$\boxed{|2m + 2n| = c}$ ($\nexists$ solução)

Para $x \leq -m$ e $-n \leq y < n \therefore |-x + m - y + n - (-x - m) - (y + n)| = c \rightarrow$

$|-2y + 2m| = c \rightarrow y = m + \frac{c}{2}$ ou $\boxed{y = m - \frac{c}{2}}$ (a)

Para $x \leq -m$ e $y \geq n \therefore |-x + m + y - n — (-x - m) - (y + n)| = c$

$\boxed{|2m - 2n| = c}$ ($\nexists$ solução)

Para $-m \leq x < m$ e $y \leq -n \therefore |-x + m - y + n - (x + m) - (-y - n)| = c \rightarrow$

$|-2x + 2n| = c \rightarrow x = n + \frac{c}{2}$ ou $\boxed{x = n - \frac{c}{2}}$ (b)

Para $-m \leq x < m$ e $-n \leq y < n \therefore |-x + m - y + n - (x + m) - (y + n)| = c \rightarrow$

$|-2x - 2y| = c \rightarrow \boxed{y = -x - \frac{c}{2}}$ (c) ou $\boxed{y = -x + \frac{c}{2}}$ (d)

Para $-m \leq x < m$ e $y \geq n \therefore |-x + m + y - n - (x + m) - (y + n)| = c \rightarrow$

$|-2x - 2n| = c \rightarrow x = -n - \frac{c}{2}$ ou $\boxed{x = -n + \frac{c}{2}}$ (e)

Para $x \geq m$ e $y \leq -n \therefore |x - m - y + n - (x + m) — (-y - n)| = c \rightarrow$

$\boxed{|-2m + 2n| = c}$ ($\nexists$ solução)

Para $x \geq m$ e $-n \leq y < n \therefore |x - m - y + n - (x + m) - (y + n)| = c \rightarrow$

$|-2y - 2m| = c \rightarrow y = -m - \frac{c}{2}$ ou $\boxed{y = -m + \frac{c}{2}}$ (f)

Para $x \geq m$ e $y \geq n \therefore |x - m + y - n - (x + m) - (y + n)| = c \rightarrow$

$\boxed{|-2m - 2n| = c}$ ($\nexists$ solução)

Com todas as equações definidas, podemos esboçar o gráfico da hipérbole na Forma Canônica (1ºCaso-a).

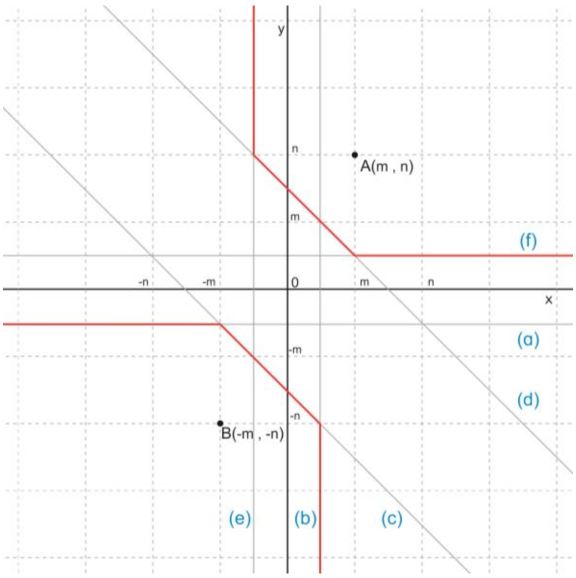


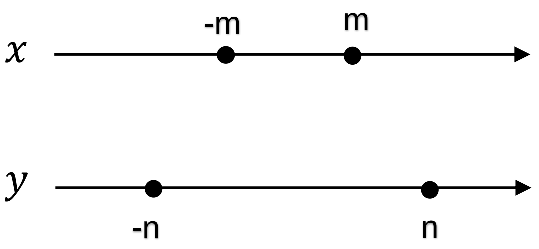
Figura 3.3.3 – Parábola na geometria do Táxi
(Forma canônica/1º Caso-a).

<u>1º Caso (b):</u> Dados os pontos $A(m,n)$ e $B(-m,-n)$ com $0 < m \leq n$. Encontre os pontos $P(x,y)$ do plano que atendem a equação: $|D_T(P,A) - D_T(P,B)| = c$ com $D_T(A,B) > c$ e $n - m > \frac{c}{2}$.

Solução:

Nessas condições, temos que:

$\big||x-m| + |y-n| - |x+m| - |y+n|\big| = c$



Para $x \leq -m$ e $y \leq -n$ ∴ $|-x+m-y+n-(-x-m)-(-y-n)| = c \rightarrow$

$\boxed{|2m+2n| = c}$ $(\nexists$ solução$)$

Para $x \leq -m$ e $-n \leq y < n$ ∴ $|-x+m-y+n-(-x-m)-(y+n)| = c \rightarrow$

$|-2y+2m| = c \rightarrow \boxed{y = m + \frac{c}{2}}$ (b) e $\boxed{y = m - \frac{c}{2}}$ (a)

Para $x \leq -m$ e $y \geq n$ ∴ $|-x+m+y-n—(-x-m)-(y+n)| = c$

$\boxed{|2m-2n| = c}$ $(\nexists$ solução$)$

Para $-m \leq x < m$ e $y \leq -n$ ∴ $|-x+m-y+n-(x+m)-(-y-n)| = c \rightarrow$

$|-2x+2n| = c \rightarrow x = n + \frac{c}{2}$ ou $x = n - \frac{c}{2}$

Para $-m \leq x < m$ e $-n \leq y < n$ ∴ $|-x+m-y+n-(x+m)-(y+n)| = c \rightarrow$

$|-2x-2y| = c \rightarrow \boxed{y = -x - \frac{c}{2}}$ (c) e $\boxed{y = -x + \frac{c}{2}}$ (d)

Para $-m \leq x < m$ e $y \geq n$ ∴ $|-x+m+y-n-(x+m)-(y+n)| = c \rightarrow$

$|-2x-2n| = c \rightarrow x = -n - \frac{c}{2}$ ou $x = -n + \frac{c}{2}$

Para $x \geq m$ e $y \leq -n$ ∴ $|x-m-y+n-(x+m)—(-y-n)| = c \rightarrow$

$\boxed{|-2m+2n| = c}$ $(\nexists$ solução$)$

Para $x \geq m$ e $-n \leq y < n$ ∴ $|x-m-y+n-(x+m)-(y+n)| = c \rightarrow$

$|-2y-2m| = c \rightarrow \boxed{y = -m - \frac{c}{2}}$ (e) e $\boxed{y = -m + \frac{c}{2}}$ (f)

Para $x \geq m$ e $y \geq n$ ∴ $|x-m+y-n-(x+m)-(y+n)| = c \rightarrow$

$\boxed{|-2m-2n| = c}$ $(\nexists$ solução$)$

Com todas as equações definidas, podemos esboçar o gráfico da hipérbole na Forma Canônica (1ºCaso-b).

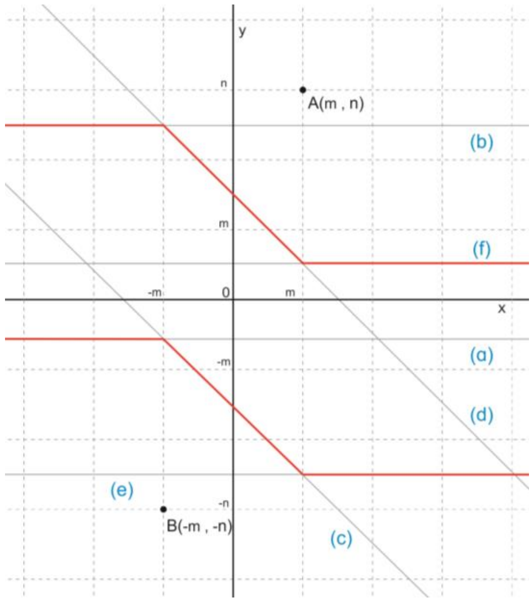


Figura 3.3.4 – Hipérbole na geometria do Táxi
(Forma canônica/1º Caso-b1).

<u>1º Caso (c):</u> Caso $n - m = \frac{c}{2}$, as igualdades $|2m - 2n| = c$ e $|-2m + 2n| = c$ terão solução. Sendo assim, além das equações encontradas, teremos também as áreas delimitadas pelas inequações: $x \leq -m$ e $y \geq n$, $x \geq m$ e $y \leq -n$.

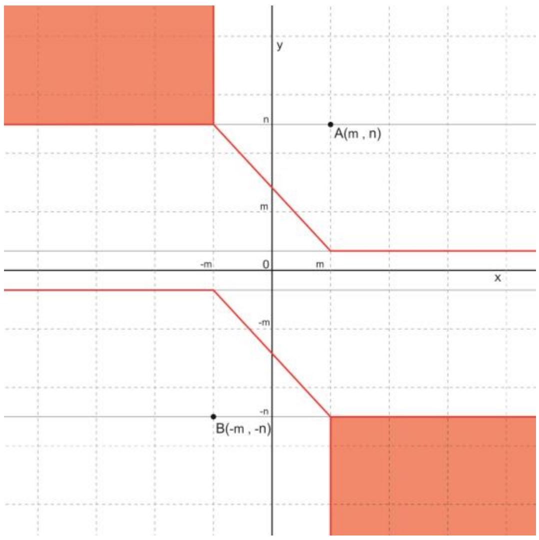


Figura 3.3.5 – Hipérbole na geometria do Táxi
(Forma canônica/2n – 2m = c).

Este é ponto de passagem do (1º Caso-a) para o (1º Caso-b).

Agora, veremos o que acontece com a hipérbole ao aplicar as funções T e W.

- Seja T : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que T$(x,\ y) = (y,\ x)$

  Temos, T$(A) = (n, m)$ e T$(B) = (-n, -m)$ com $0 < m \leq n$.

  Com isso, ao analisar as equações do (1º Caso-b), teremos:

$$x = m + \frac{c}{2}\ (b)\ e\ x = m - \frac{c}{2}\ (a)$$

$$y = -x - \frac{c}{2}\ (c)\ e\ y = -x + \frac{c}{2}\ (d)$$

$$x = -m - \frac{c}{2}\ (e)\ e\ x = -m + \frac{c}{2}\ (f)$$

Com todas as equações definidas, podemos esboçar um novo gráfico da hipérbole para a Forma Canônica (1º Caso-b).

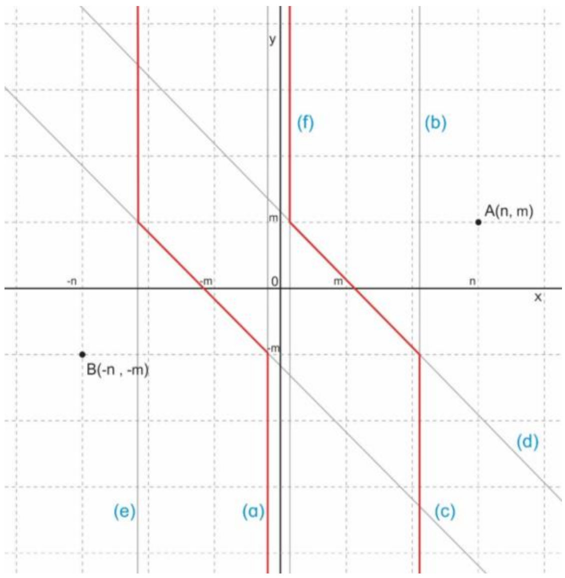


Figura 3.3.6 – Hipérbole na geometria do Táxi (Forma canônica/1º Caso-b2).

- Seja W : $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que W$(x,\ y) = (-\mathrm{x},\ \mathrm{y})$

  Temos, W$(A) = (-\mathrm{m}, \mathrm{n})$ e W$(B) = (\mathrm{m}, -\mathrm{n})$ com $0 < m \leq n$.

Caso seja aplicado a função W, serão mantidas as equações estudadas em cada um dos casos anteriores.

<u>2º Caso:</u> Dados os pontos $A(m, 0)$ e $B(-m, 0)$ com $0 < m$. Encontre os pontos $P(x, y)$ do plano que atendem a equação: $|D_T(P, A) - D_T(P, B)| = c$ com $D_T(A, B) > c$.

Ao resolver as equações nesse caso, teremos como resultado apenas duas retas verticais $x = n + \frac{c}{2}$ e $x = n - \frac{c}{2}$. Como $n = 0$, temos então as retas $x = \frac{c}{2}$ e $x = \frac{-c}{2}$.

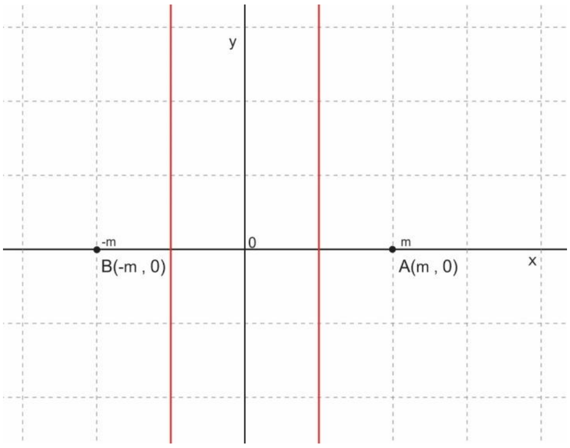


Figura 3.3.7 – Hipérbole na geometria do Táxi
(Forma canônica/2º Caso).

<u>3ºCaso:</u> Dados os pontos $A(0, n)$ e $B(0, -n)$ com $0 < n$. Encontre os pontos $P(x, y)$ do plano que atendem a equação: $|D_T(P, A) - D_T(P, B)| = c$ com $D_T(A, B) > c$.

Ao resolver as equações nesse caso, teremos como resultado apenas duas retas horizontais $y = m + \frac{c}{2}$ e $y = m - \frac{c}{2}$. Como $m = 0$, temos então as retas $y = \frac{c}{2}$ e $y = \frac{-c}{2}$.

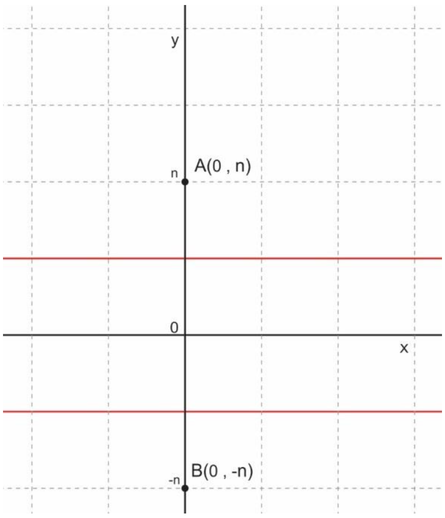


Figura 3.3.8 – Hipérbole na geometria do Táxi
(Forma canônica/3º Caso).

Utilizando o software Geogebra, podemos observar mais facilmente todos os casos acima descritos.

Acesse o QR Code e observe esse fato de forma dinâmica:

Link: https://www.geogebra.org/m/cffvthnb

Abaixo temos um exemplo numérico para ilustrar a construção de uma hipérbole na geometria do táxi.

Exemplo: Dados os pontos $A(-1,1)$ e $B(1,-2)$, encontre os pontos $P(x,y)$ do plano que atendem a equação: $|D_T(P,A) - D_T(P,B)| = 3$

Solução:

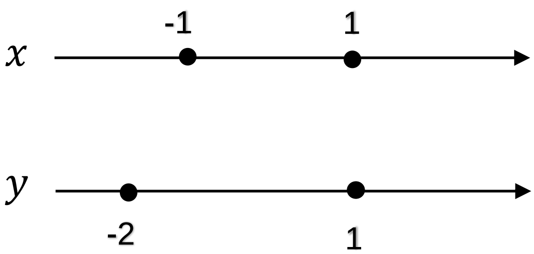
$D_T(A,B) > 3$

$D_T(A,B) = |-1-(1)| + |1-(-2)| = |-2| + |1+2| = 5$

Logo, como $5 > 3 \rightarrow \boxed{D_T(A,B) > 3}$

Nessas condições, temos que:

$\big||x+1| + |y-1| - |x-1| - |y+2|\big| = 3$



Para $x < -1$ e $y < -2 \therefore |-x-1-y+1—x+1) - (-y-2) = 3 \rightarrow$

$\boxed{|1| = 3}$ (∄ solução)

Para $x < -1$ e $-2 \leq y < 1 \therefore |-x-1-y+1—(-x+1) - (y+2)| = 3 \rightarrow$

$|-2y-3| = 3 \rightarrow y = -3$ ou $\boxed{y = 0}$ (a)

Para $x < -1$ e $y \geq 1 \therefore |-x-1+y-1—(-x+1) - (y+2)| = 3 \rightarrow \boxed{|-5| = 3}$ (∄ solução)

Para $-1 \leq x < 1$ e $y < -2 \therefore |x+1-y+1—(-x+1) - (-y-2)| = 3 \rightarrow$

$|2x+3| = 3 \rightarrow x = -3\ ou\ \boxed{x = 0}\ (b)$

Para $-1 \le x < 1$ e $-2 \le y < 1 \therefore |x+1-y+1 — (-x+1)-(y+2)| = 3 \rightarrow$

$|2x-2y-1| = 3 \rightarrow \boxed{y = x-2}\ (c)\ ou\ \boxed{y = x+1}\ (d)$

Para $-1 \le x < 1$ e $y \ge 1 \therefore |x+1+y-1 — (-x+1)-(y+2)| = 3 \rightarrow |2x-3| = 3 \rightarrow$

$x = 3\ ou\ \boxed{x = 0}\ (b)$

Para $x \ge 1$ e $y < -2 \therefore |x+1-y+1 — (x-1)-(-y-2)| = 3 \rightarrow \boxed{|5| = 3}\ (\nexists\ \text{solução})$

Para $x \ge 1$ e $-2 \le y < 1 \therefore |x+1-y+1 — (x-1)-(y+2)| = 3 \rightarrow$

$|-2y+1| = 3 \rightarrow \boxed{y = -1}\ (f)\ ou\ y = 2$

Para $x \ge 1$ e $y \ge 1 \therefore |x+1+y-1 — (x-1)-(y+2)| = 3 \rightarrow \boxed{|-1| = 3}\ (\nexists\ \text{solução})$

Com todas as equações definidas, podemos esboçar o gráfico da hipérbole no modelo do Táxi.

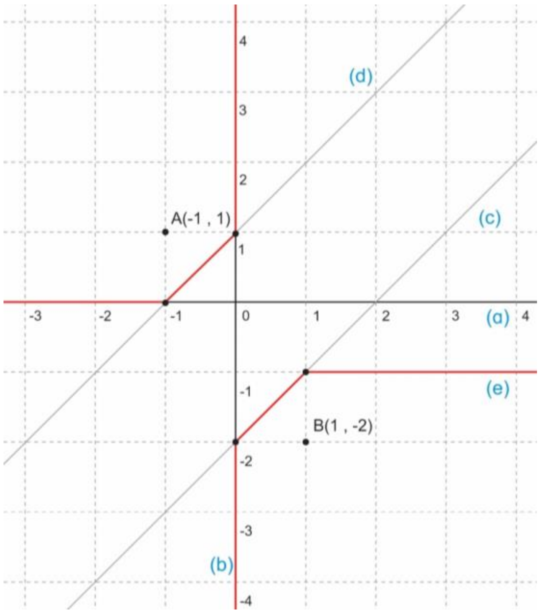


Figura 3.3.9 – Hipérbole na geometria do Táxi.

3.4 Próximo passo: seções cônicas na Geometria do Táxi

3.4.1 As Cônicas de Apolônio

Apolônio de Perga, nasceu no sul da Ásia Menor, por volta de 262 a.C e morreu por volta de 190 a.C.,[1]. Ele escreveu muitos tratados matemáticos, dentre eles, “As cônicas", é considerada juntamente com os Elementos de Euclides uma das maiores obras sobre seções cônicas. Entretanto, a obra de Apolônio acrescentou algumas propriedades aprimorando o que tinha sido desenvolvido por Euclides e seus antecessores.

Apolônio descobriu que não é necessário realizar os cortes dos cones por planos perpendiculares à geratriz, basta variar a inclinação do plano da seção. Provou também que o cone não precisava ser reto, podendo ser oblíquo ou escaleno. Uma das propriedades mais importantes acrescentadas por Apolônio, foi a substituição do cone de uma folha pelo de duas folhas, com isso a hipérbole passou a ser entendida como uma curva de dois ramos.

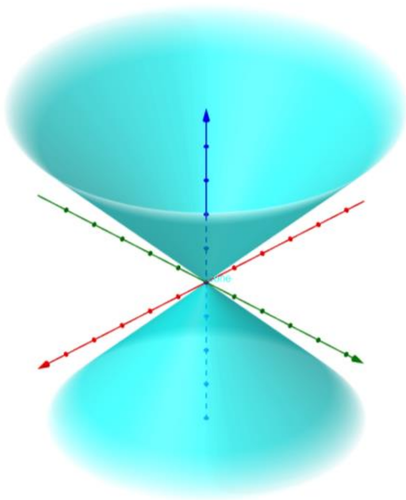


Figura 3.4.1 - Cone de duas folhas

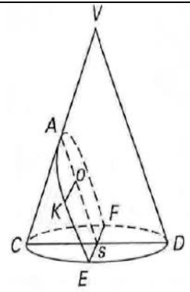
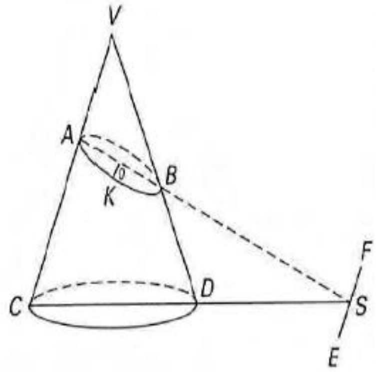
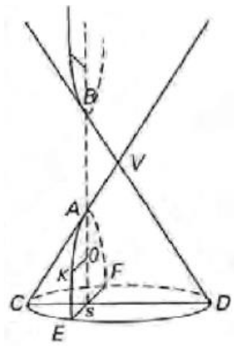
Definições de Apolônio:

Definição. O triângulo axial é o triângulo obtido no corte do cone a partir do vértice em seu eixo por um plano, e na figura 3.4.2 é denotado por ΔVCD.

Definição. O diâmetro da base do cone é a interseção da base com o plano com o qual o cone foi cortado, e está representado na figura 3.4.2 por CD.

A parábola, a elipse e a hipérbole são definidas como as interseções dos planos que cortam o segmento CD (diâmetro) ou seu prolongamento sobre uma reta EF com o cone. A reta AS é a interseção dos cortes do plano com o triangulo axial. Dessa forma, com relação a esse método obtemos:

Tabela 4 – Cônicas de Apolônio

Definição	**Representação Geométrica**
Parábola: caso em que AS é paralelo ao lado do triângulo axial. O nome "parábola" vem do grego *paraboli*, que significa aproximação sem falta ou excesso.	 Figura 3.4.2 - Parábola Fonte: LOPES, F.J., 2011[6]
Elipse: caso em que AS intersecciona dois lados do triângulo axial. O termo "elipse" foi originado do grego ellipis, que corresponde a aplicação de áreas por falta.	 Figura 3.4.3 - Elipse Fonte: LOPES, F.J., 2011[6]
Hipérbole: caso em que AS intersecciona dois lados do triângulo axial e o prolongamento do outro lado oposto ao vértice V. O termo "hipérbole" foi originado do grego yperboli, isto é, uma aplicação de áreas por excesso.	 Figura 3.4.4 - Hipérbole Fonte: LOPES, F.J., 2011[6]

3.4.2 Um exemplo na Geometria do Táxi

Diferentemente das seções cônicas de Apolônio, definir algo parecido ao cone de duas folhas na Geometria do Táxi, não parece ser algo simples. Pelo simples fato de: ao rotacionar os focos de uma elipse e de uma hipérbole, ou até mesmo a reta diretriz de uma parábola, temos diferentes resultados devido à complexidade das equações modulares encontradas nas cônicas do Táxi.

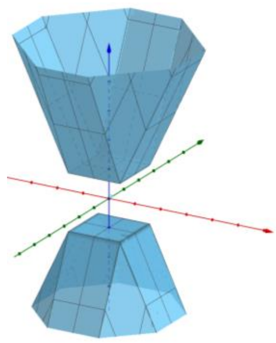
Podemos perceber tal fato nos 3 casos que foram divididos a forma canônica da elipse. Para o 1ºcaso temos a interseção de 8 equações tendo como resultado 8 segmentos de reta, formando assim um octógono. Para o 2º e 3º casos temos como a interseção das 8 equações, 6 segmentos de reta, formando assim um hexágono. Ou seja, a elipse tem dois formatos diferentes dependendo de onde estejam seus focos.

Com todas essas variações nas equações cônicas, nos fazemos a seguinte pergunta: será possível encontrar uma única equação incluindo o Eixo Z, que ao intersectar planos em diferentes inclinações, nos resultam as três cônicas da Geometria do Táxi? Ainda não possuímos essa resposta mas podemos analisar de forma inicial a equação da elipse (1º Caso) vista nesse capítulo incluindo mais um eixo.

Veremos a seguir uma interpretação da elipse na Geometria do Táxi, mas agora em 3 dimensões (incluindo o Eixo Z). Não falaremos mais de interseções de retas mas sim de interseções de planos formando assim superfícies.

Usaremos o 1º Caso da elipse para a ilustração de sua respectiva superfície. As superfícies abaixo foram feitas no Software Geogebra3D.

Tabela 5 – ElipseGT

Equação	**Superfície**
$\lvert x-a\rvert + \lvert y-b\rvert + \lvert x+a\rvert + \lvert y+b\rvert = \lvert z\rvert$ <u>Seções paralelas:</u> • Ao Plano XY: são elipses; • Ao Plano XZ: são hipérboles; • Ao Plano YZ: são hipérboles.	 Figura 3.4.5 – ElipseGT-3D.

Fazendo a seção paralela ao Plano XY, obteremos elipses. Podemos observar esse fato na imagem abaixo.

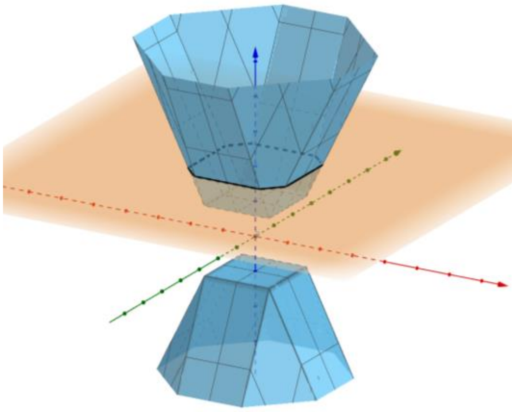


Figura 3.4.6 – ElipseGT-3D (Plano XY).

.

Fazendo a seção paralela ao Plano XZ, obteremos hipérboles. Observe esse fato na imagem abaixo.

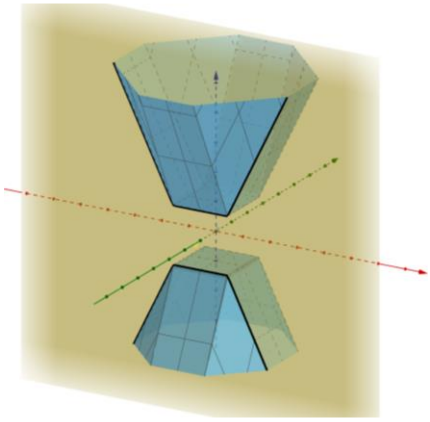


Figura 3.4.7 – ElipseGT-3D (Plano XZ).

De maneira semelhante, ao fazer a seção paralela ao Plano YZ, obteremos hipérboles. Podemos observar esse fato na imagem abaixo.

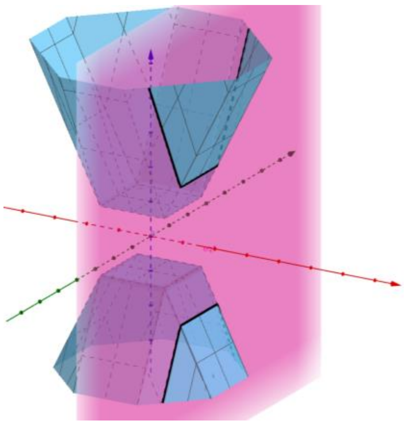


Figura 3.4.8 – ElipseGT-3D (Plano YZ).

Interessante observar que ao fazer a seção com o Plano X=Y, obteremos hipérboles. Podemos observar esse fato na imagem abaixo.

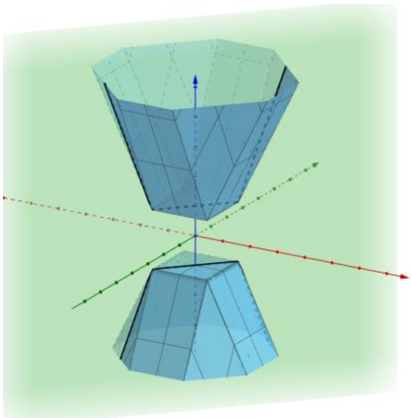


Figura 3.4.9 – ElipseGT-3D (Plano X=Y).

Podemos concluir que ao fazer as seções acima e observando suas interseções, temos como resultado as cônicas estudadas na geometria do táxi. Os outros dois casos da elipse e as demais cônicas, quando feitas as seções paralelas, não ficam claros geométrica e algebricamente seus resultados.

Capítulo 4

ATIVIDADES DIDÁTICAS

Veremos a seguir algumas atividades voltadas para o ensino básico, visando levar esse assunto de forma leve e interessante para os alunos e por fim as considerações finais.

4.1 Atividades

As atividades a seguir têm como objetivos gerais:

- Resolver situações-problema adotando estratégias, desenvolvendo assim novas formas de raciocínio;
- Trabalhar em equipe de modo cooperativo;
- Entender aplicações de um novo conceito de distância (Distância Táxi);
- Relacionar a circunferência e as cônicas nas geometrias Euclidiana e na geometria do Táxi.

Atividade 1

Público alvo: Alunos que estão cursando o 9ºAno do Ensino Fundamental, pois já conhecem o plano cartesiano e a geometria básica necessária para os assuntos abordados.

Metodologia: Para a resolução da atividade, a turma será dividida em duplas ou trios, e ao final, com mediação do professor, os alunos debaterão a tarefa realizada.

A atividade seguirá o seguinte processo de resolução:

- Primeiro, o professor apresentará aos alunos a Geometria do Táxi, ensinando um novo conceito de distância;
- Após conhecer essa nova geometria, a turma fará a atividade com breves intervenções do docente;

- Ao final, o professor realiza uma discussão sobre as respostas obtidas e faz o paralelo entre as geometrias Euclidiana e do Táxi.

<u>Material didático:</u>

- Presencial: mapa da cidade impresso (ou uma malha quadriculada), régua, compasso, lápis e borracha;
- On-line: utilização do software para desenho geométrico Geogebra.

<u>Tempo:</u> O tempo estimado para realização da atividade será de 45 min.

<u>Situação problema:</u>

O trabalho de João o transferiu para uma nova cidade. Chegando lá, ele percebeu que se tratava de uma cidade planejada, onde todos os quarteirões tinham o formato quadrado, de lado 200m. Além disso, ele observou que todas as ruas possuíam ciclovias. Como João planejava usar sua bicicleta diariamente como meio de transporte, ele decidiu alugar um apartamento há 1 km de distância de seu novo emprego.

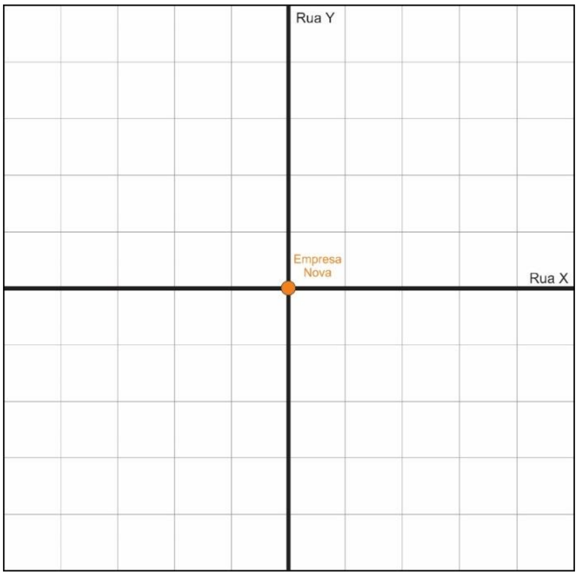


Figura 4.1 – Atividade 1.

a) Encontre o máximo de pontos no mapa da cidade que fiquem exatamente há 1 km do novo trabalho de João.

Orientação para o professor: *É importante o professor orientar os alunos sobre a quantidade de pontos a serem marcados no mapa, ou seja, quanto mais pontos eles marcarem no mapa, mais facilmente verão o caminho a ser traçado na letra "b".*

b) Você reconhece essa figura? Com o auxílio de uma régua, conecte os pontos marcados na letra "a" com o objetivo de revelar tal figura conhecida.

Orientação para o professor: *Após o término da letra "b", o professor deve comentar sobre a influência do tamanho dos quarteirões na quantidade de pontos. Ou seja, quanto menor o* *quarteirão, mais pontos poderão ser marcados no mesmo mapa, tendo assim um melhor detalhamento para traçar as linhas pedidas.*

c) E se essa situação tivesse que ser resolvida segundo a geometria euclidiana, como seria a forma traçada? Desenhe.

Orientação para o professor: *Professor introduz a discussão final sobre as duas geometrias construindo com eles a solução na geometria euclidiana no mesmo mapa.*

Atividade 2

Público alvo: Alunos que estão cursando a 3ª série do Ensino Médio, pois é preciso que todos já tenham aprendido previamente as definições das cônicas.

Metodologia: Para a resolução da atividade, a turma será dividida em duplas ou trios, e ao final de cada situação problema, com mediação do professor, os alunos debaterão a tarefa realizada.

A atividade seguirá o seguinte processo de resolução:

- Primeiro, o professor apresentará aos alunos a Geometria do Táxi, ensinando um novo conceito de distância;
- Após conhecer essa nova geometria, a turma fará a atividade com breves intervenções do docente;
- Ao final de cada situação problema, o professor realiza uma discussão sobre as respostas obtidas e faz o paralelo entre as geometrias Euclidiana e do Táxi.

Material didático:

- Presencial: mapa da cidade impresso (ou uma malha quadriculada), régua, lápis e borracha;
- On-line: utilização do software para desenho geométrico Geogebra.

Tempo: O tempo estimado para realização da atividade será de 45 min.

Situação problema (a):

Visando melhorar a eficiência das ambulâncias, o prefeito de uma cidade planejada – onde todos os quarteirões têm formato quadrado (de lado 200 m) e as ruas são mão dupla –, estabeleceu rotas diárias para cada veículo.

As ambulâncias que fazem rota entre o Hospital Central (HC) e a Unidade de Pronto Atendimento (UPA) só poderão percorrer caminhos em que a soma das distâncias entre o HC e a ambulância, e entre a UPA e a ambulância, seja no máximo 1600m.

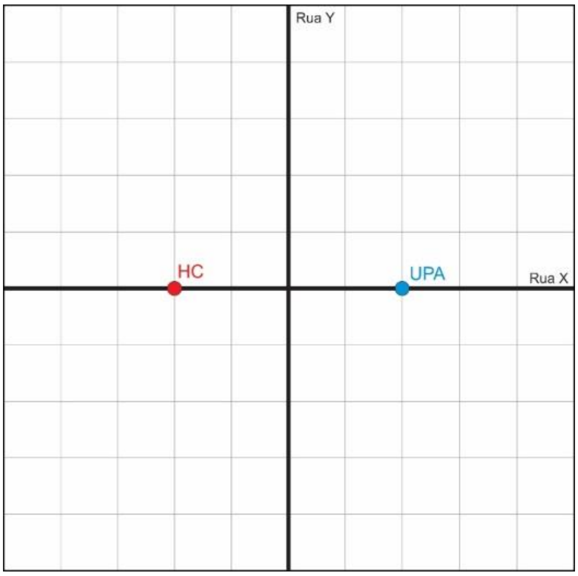


Figura 4.2 – Atividade 2 (a).

a) Encontre o máximo de pontos no mapa da cidade em que a soma das distâncias seja exatamente 1600m.

Orientação para o professor: *É importante o professor orientar os alunos sobre a quantidade de pontos a serem marcados no mapa, ou seja, quanto mais pontos eles arcarem no mapa, mais facilmente verão o caminho a ser traçado na letra "b".*

b) Com o auxílio de uma régua, conecte os pontos marcados no item "a" de tal forma que apareça um hexágono convexo.

Orientação para o professor: *Após o término da letra "b", o professor deve comentar sobre a influência do tamanho dos quarteirões na quantidade de pontos. Ou seja, quanto menor o quarteirão, mais pontos poderão ser marcados no mesmo mapa, tendo assim um melhor detalhamento para traçar as linhas pedidas.*

c) Agora, seguindo a restrição dada, a ambulância deve percorrer um caminho que esteja no máximo a 1600 m. Como você interpreta essa afirmação?

Orientação para o professor Nesse item o professor irá discutir o conceito de distância máxima. Aqui abordamos a ideia de área, pois qualquer ponto no interior da região delimitada no item "b", seguiria a restrição dada.

d) E se essa situação tivesse que ser resolvida segundo a geometria euclidiana, como ficaria a figura? Desenhe.

Orientação para o professor: *Professor introduz a discussão final sobre as duas geometrias construindo com eles a solução na geometria euclidiana no mesmo mapa, mostrando que estamos falando da elipse.*

Situação problema (b):

A partir das rotas criadas para as ambulâncias, o prefeito percebeu uma melhora no sistema de saúde da cidade. Também visando otimizar o sistema de coleta de lixo e garantir maior sustentabilidade, o prefeito optou pela coleta seletiva e decidiu fazer um teste na zona norte da cidade.

Para isso, foram criadas rotas para seis dias da semana, começando na segunda e terminando no sábado.

Figura 4.3 – Coleta Seletiva.

O caminhão sairá do Centro de Coleta (CC), descerá um quarteirão em direção à rua X e a partir daí deverá manter sempre a mesma distância entre a rua X e o CC.

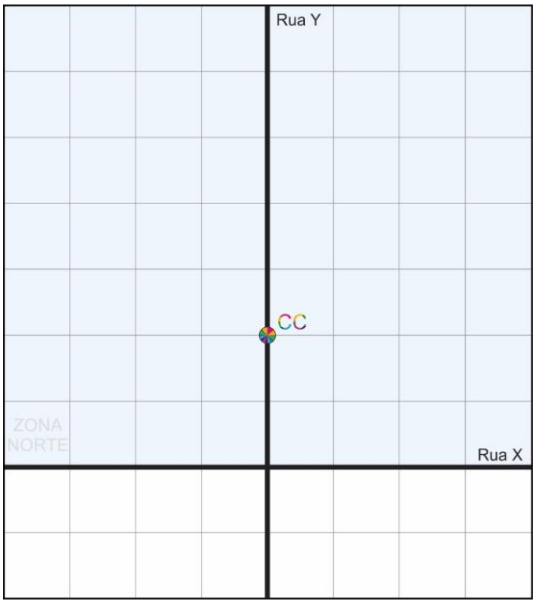


Figura 4.4 – Atividade 2 (b).

a) Encontre o número máximo de pontos no mapa da cidade seguindo o comando dado. Em seguida, tente traçar a rota do caminhão em cima dos pontos marcados.

Orientação para o professor: O *professor abre uma discussão sobre qual cônica os alunos acham se trata esse desenho, chegando assim na parábola euclidiana. Em seguida, ele apresenta aos alunos o 1º Caso na Geometria da parábola do Táxi.*

b) Como já sabemos da teoria analítica tradicional, o caminhão apresenta um percurso parabólico, agora vamos modelar essa rota algebricamente. Determine uma equação que represente matematicamente essa cônica.

Orientação para o professor: *Após o término da letra “a” e a explicação sobre a parábola do táxi, oriente os alunos a transformar o mapa num plano cartesiano numerado em que Ruas X e Y são os eixos X e Y.*

c) E se essa situação tivesse que ser resolvida segundo a geometria euclidiana, como ficaria a equação e a figura?

Orientação para o professor: *Professor introduz a discussão final sobre as duas geometrias, construindo com eles a solução na geometria euclidiana no mesmo mapa.*

4.2 Considerações finais

Através da análise das cônicas na Geometria do Táxi, podemos perceber formatos diferentes em uma mesma cônica. Neste trabalho, introduzimos uma generalização de tais cônicas, separando-as em casos. Com a ajuda do software GeoGebra conseguimos ter uma melhor visualização do formato de cada caso estudado.

No final do capítulo 3, analisamos um exemplo possível para uma interpretação das cônicas como sendo seções de uma superfície. Nesse sentido, esta análise ainda é inicial, possivelmente, um estudo mais aprofundado sobre o assunto trará grandes resultados em pesquisas futuras.

Por fim, concluímos que o contato dos alunos com a Geometria do Táxi via GeoGebra no ensino básico, contribuirá com o desenvolvimento das competências específicas da área de Matemática e suas tecnologias.

REFERÊNCIAS

[1] BICUDO, I.: ***Os Elementos/Euclides***. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

[2] EVES, H.: **Introdução à História da Matemática**. 2a Edição. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

[3] HILBERT, D.: ***The Foundations of Geometry***. Project Gutenberg's. 2005.

[4] GOMES LOIOLA, C. A. e C. SERTÃ COSTA.: ***As Cônicas na Geometria do Taxi***. Ciência e Natura, 37(3), 2015.

[5] KRAUSE, E. F.: ***Taxicab geometry: An adventure in non-Euclidean geometry***. Courier Corporation, 2012.

[6] LOPES, J.: **Cônicas e Aplicações**. 2011. 184 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro. 2011.

[7] PAVANI, V. P.: **A geometria do Taxista como ferramenta de consolidação de conteúdos**. Dissertação (Mestrado em Matemática - PROFMAT). Centro de Matemática, Computação e Cognição. Universidade Federal do ABC, Santo André. 2017.

[8] ROQUE, T.: ***História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas***. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Apêndice

RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE

Abaixo temos a resolução das duas atividades propostas.

<u>Atividade 1</u>

a) Possibilidades para marcação dos pontos.

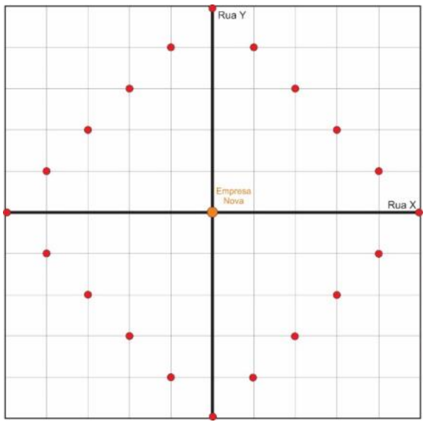


Figura 5.1 – Atividade 1(gabarito-a).

b) Caso os quarteirões tivessem as medidas de seus lados iguais a 100 m e 50 m, teríamos uma quantidade maior de pontos, dando assim um maior detalhamento.

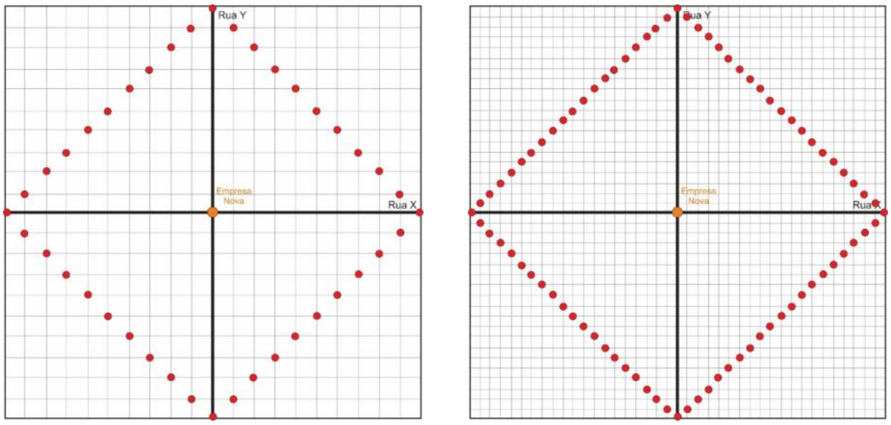


Figura 5.2 – Atividade 1(quarteirões 100 m e 50 m).

Abaixo, as linhas a serem traçadas formam a circunferência táxi.

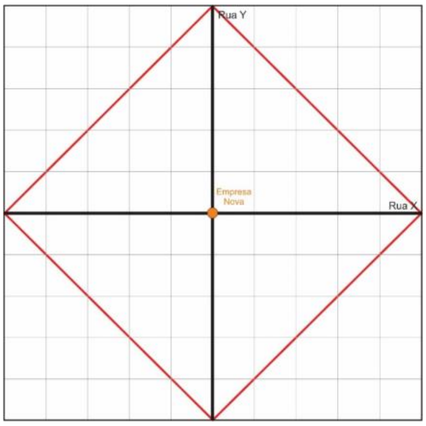


Figura 5.3 – Atividade 1 (gabarito-b).

c) Importante observar a circunferência nas duas geometrias e atentar para o fato que existem apenas quatro pontos comuns entre elas.

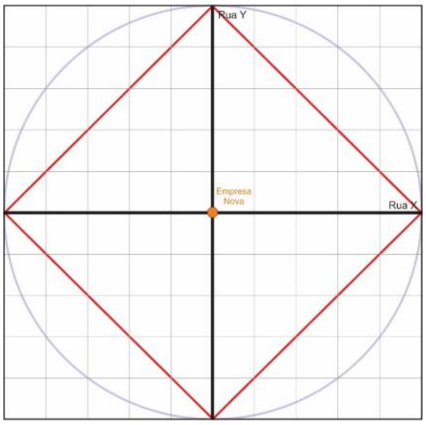


Figura 5.4 – Atividade 1 (gabarito-c).

Atividade 2

Situação problema (a):

a) Possibilidades para marcação dos pontos.

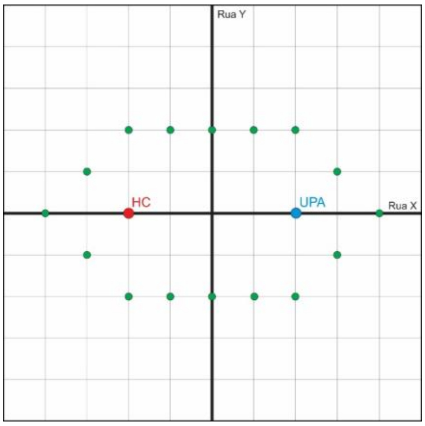


Figura 5.5 – Atividade 2-a (gabarito-a).

b) Caso os quarteirões tivessem as medidas de seus lados iguais a 50 m, teríamos uma quantidade maior de pontos, dando assim um maior detalhamento.

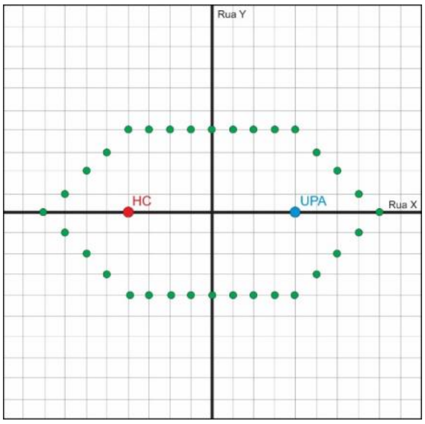


Figura 5.6 – Atividade 2-a (Quarteirões 100 m).

Abaixo, as linhas a serem traçadas formam a elipse do táxi.

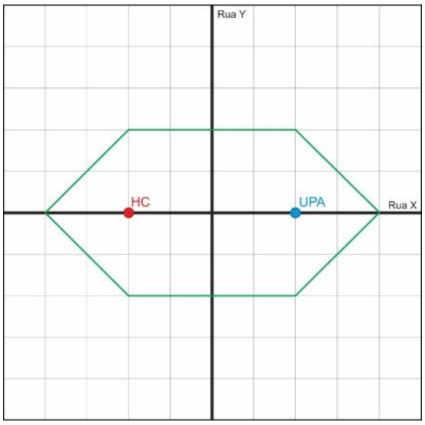


Figura 5.7 – Atividade 2-a (gabarito-b).

c) Nessa atividade, temos que nos atentar para o fato de ser no máximo 1600 m. Isso nos traz a noção de área. Ou seja, a rota da ambulância deve estar compreendida na área verde, que é representada pela elipse do táxi.

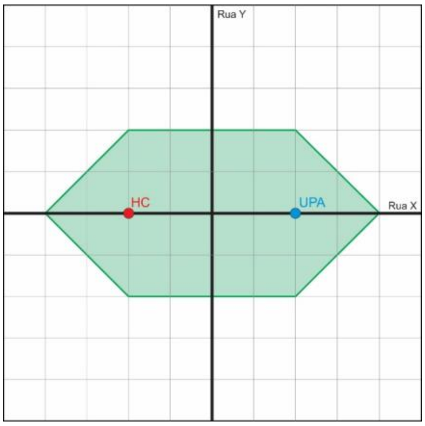


Figura 5.8 – Atividade 2-a (gabarito-c).

d) A área amarela, representa a elipse euclidiana.

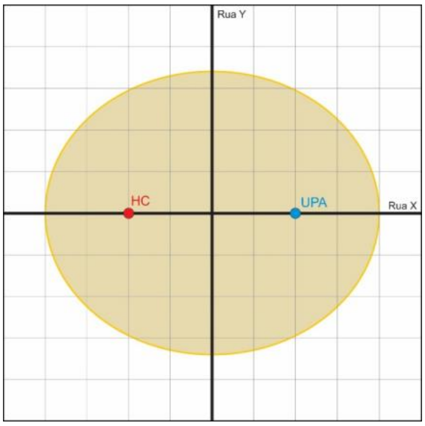


Figura 5.9 – Atividade 2-a (gabarito-d).

Importante observar a elipse nas duas geometrias nesse exemplo e atentar para o fato que existem apenas dois pontos comuns entre elas. Todos os demais pontos da elipse do táxi são interiores a elipse euclidiana.

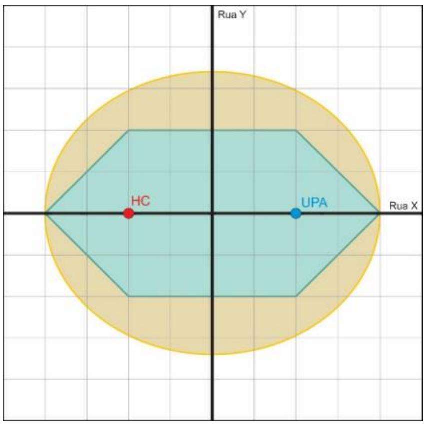


Figura 5.10 – Atividade 2-a (Elipses no mesmo mapa).

<u>Situação problema (b):</u>

a) Possibilidades para marcação dos pontos.

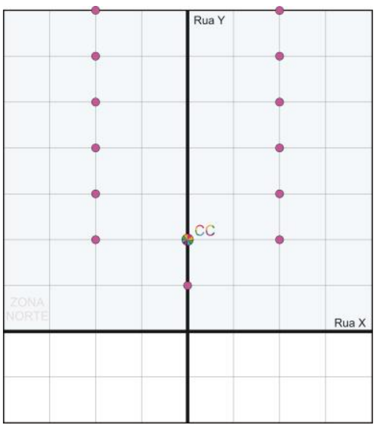


Figura 5.11 – Atividade 2-b (gabarito-a.1).

Abaixo, as linhas a serem traçadas formam a parábola do táxi.

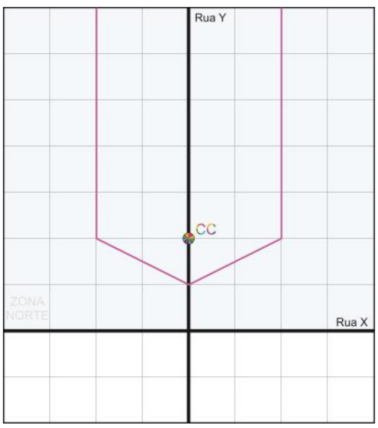


Figura 5.12 – Atividade 2-b (gabarito-a.2).

b) Seja CC o ponto (0, 2) foco da parábola e a Rua X (Eixo X) a reta diretriz.

Então, sendo o ponto CC$(0, 2)$ e a reta $r : y = 0$.

Devemos definir a equação do plano em que qualquer ponto $P(x, y)$ do plano atenda a equação: $D_T(P, CC) = D_T(P, r)$.

Logo, a equação da parábola do táxi é: $|x| + |y - 2| = |y|$.

c) Mantendo as mesmas marcações feitas no item "b", a equação da parábola na geometria euclidiana é: $x^2 - 4y = -4$.

Demonstração:

$$D_E(P, CC) = D_E(P, r).$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \frac{|0.x + 1.y + 0|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = y$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2$$

$$x^2 - 4y = -4 \,\square$$

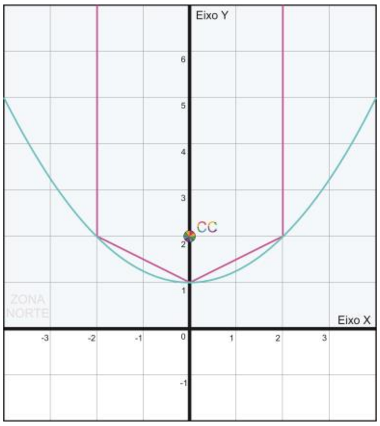


Figura 5.13 – Atividade 2-b (gabarito-c).