



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**FABIO GONÇALVES TAVARES**

A GEOMETRIA DE FRACTAIS NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE  
ATIVIDADE PARA CÁLCULO DE DIMENSÕES FRACTAIS

RIO DE JANEIRO

2021



**FABIO GONÇALVES TAVARES**

**A GEOMETRIA DE FRACTAIS NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE  
ATIVIDADE PARA CÁLCULO DE DIMENSÕES FRACTAIS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientadores: Prof. Dr. Gladson Antunes e Prof. Dr. Michel Cambrinha

Rio de Janeiro

2021

Catálogo informatizada pelo(a) autor(a)

T231 Tavares, Fabio Gonçalves  
A Geometria de Fractais no Ensino Médio: uma  
Proposta de Atividade para Cálculo de Dimensões  
Fractais / Fabio Gonçalves Tavares. -- Rio de  
Janeiro, 2021.  
53 f

Orientador: Gladson Octaviano Antunes.  
Coorientador: Michel Cambrinha de Paula.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do  
Estado do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação  
em Matemática, 2021.

1. Matemática. 2. Fractais. 3. Ensino Médio. I.  
Octaviano Antunes, Gladson, orient. II. Paula,  
Michel Cambrinha de, coorient. III. Título.

**Fabio Gonçalves Tavares**

**A Geometria de Fractais no Ensino Médio: uma Proposta de Atividade para  
Cálculo de Dimensões Fractais**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado ao Programa de Pós-  
graduação em Matemática PROFMAT  
da UNIRIO, como requisito para a  
obtenção do grau de MESTRE em  
Matemática.

Aprovado em 19 de outubro de 2021.

*Gladson Octaviano Antunes*

---

Prof. Gladson Octaviano Antunes (UNIRIO) (Orientador)

*Michel Cambrinha de Paula*

---

Prof. Michel Cambrinha de Paula (UNIRIO) (Co-Orientador)

*Fábio Xavier Penna*

---

Prof. Fábio Xavier Penna (UNIRIO)

*Vanderlei Minori Horita*

---

Prof. Vanderlei Minori Horita (UNESP)



Dedico este trabalho à Ravi e Luna,  
que me obrigam a ser uma pessoa  
melhor a cada dia.

## AGRADECIMENTOS

As palavras desse pequeno texto jamais irão expressar toda a gratidão que tenho pelas pessoas que Deus colocou em meu caminho. Nesta passagem, a palavra gratidão vai além da verbalização do termo “obrigado”. Aqui está em sua plenitude a essência da origem da palavra que surge do latim *gratia* que significa “sentimento de graça”.

Em ordem cronológica, agradeço aos meus pais pelos valores familiares e apoio incondicional desde o meu primeiro choro. Mesmo fundamentado em excêntricos modos de expressar os sentimentos de tolerância, respeito, solidariedade e empatia, num lar de quatro pessoas, nunca nos faltou amor.

Na metade do caminho, conheci uma moça que, ainda criança, cobria os pés quando chovia para não os sujar de lama ao ir à escola. A menina que ensinava outras crianças em casa num quintal de terra batida e utilizava tijolo e giz na parede, hoje respira educação e faz a diferença na vida das pessoas. Carolina Barreiros de Lima me mostrou o caminho da persistência e da resiliência. Mesmo quando eu achava que iria me ajoelhar e desistir, suas mãos nunca soltaram da minha. Mesmo quando eu andava pela rua pensativo, achando que não daria conta de tantas situações complexas como família, saúde, trabalho, futuro, suas mãos nunca soltaram da minha. Obrigado por se tornar meu dia, minha noite, minha vida. Minhas mãos nunca soltarão das suas.

Enquanto graduando, agradeço ao professor Luciano Silva Terencio de Jesus por todo apoio e esforço para que essa jornada se iniciasse.

Enquanto acadêmico agradeço aos professores e companheiros de turma que continuam contribuindo na minha formação.

Agradeço aos meus orientadores Gladson Antunes e Michel Cambrinha por serem fonte de inspiração deste trabalho ao me apresentarem o tema Geometria de Fractais e por transformarem as reuniões de orientação em momentos agradáveis, mesmo em meio à um período tenso pela pandemia e pela responsabilidade da escrita.

Agradeço aos professores que, gentilmente, aceitaram participar da banca.

O presente trabalho foi realizado com apoio a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES).

TAVARES, Fabio Gonçalves. **A Geometria de Fractais no Ensino Médio: uma Proposta de Atividade para Cálculo de Dimensões Fractais**. 2021. 53 f. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

### **RESUMO**

O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma atividade que possa contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de dimensões fractais em turmas de Ensino Médio. A partir de uma abordagem histórica e conceitual do tema, foi feito um paralelo entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Fractal. Foi apresentada, ainda, uma concretização dessa teoria a partir dos escritos de Mandelbrot (1967 e 1982). A proposta pedagógica sugerida, inspirada nos escritos do mesmo autor, refere-se à medição da costa litorânea do estado do Rio de Janeiro. Como resultados, identificamos a possibilidade de contribuir para a compreensão da Geometria de objetos não tradicionais e para o estabelecimento de modelos matemáticos que podem auxiliar os estudos de fenômenos sociais e de figuras tradicionalmente não presentes nas aulas de Matemática.

**Palavras-chave:** Matemática; Fractais; Ensino Médio.

TAVARES, Fabio Gonçalves. **Fractal Geometry in High School: An Activity Proposal for Calculating Fractal Dimensions**. 2021. 53 f. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

### **ABSTRACT**

This work aims to present an activity that can contribute to the teaching and learning process of fractal dimensions in high school classes. From a historical and conceptual approach to the subject, a parallel was made between Euclidean Geometry and Fractal Geometry. In addition, an achievement of this theory was presented based on the writings of Mandelbrot (1967 and 1982). The suggested pedagogical proposal is inspired by the writings of the same author and refers to the measurement of the coastline of the state of Rio de Janeiro. As a result, we identified the possibility to contribute for the understanding of the Geometry of non-traditional objects, and for the establishment of mathematical models that can help the study of social phenomena and figures that are not present in Mathematics classes.

**Keywords:** Mathematics; Fractals; High School.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1:</b> Processo evolutivo Fractal Pentagonal de Dürer .....	18
<b>Figura 2:</b> Função de Weierstrass .....	18
<b>Figura 3:</b> Processo evolutivo Fractal Curva de Peano.....	19
<b>Figura 4:</b> Processo evolutivo Fractal Curva de Hilbert .....	19
<b>Figura 5:</b> Processo evolutivo Fractal Tapete de Sierpinski .....	20
<b>Figura 6:</b> Processo evolutivo Fractal Esponja de Menger.....	20
<b>Figura 7:</b> Processo evolutivo Fractal Curva de Lévy .....	20
<b>Figura 8:</b> Representação do Conjunto de Cantor.....	24
<b>Figura 9:</b> Processo evolutivo da Curva de Koch .....	25
<b>Figura 10:</b> Processo evolutivo da Ilha de Koch.....	26
<b>Figura 11:</b> Processo evolutivo do Triângulo de Sierpinski .....	27
<b>Figura 12:</b> Exemplos de dimensões.....	28
<b>Figura 13:</b> Segmento dividido em partes iguais .....	29
<b>Figura 14:</b> Quadrado dividido em partes iguais .....	30
<b>Figura 15:</b> Cubo dividido em partes iguais.....	30
<b>Figura 16:</b> Curva de Koch .....	33
<b>Figura 17:</b> Mapa da Península de Banks .....	34
<b>Figura 18:</b> Ilha de Koch.....	34
<b>Figura 19:</b> Mapa da ilha Kaho'olawe.....	34
<b>Figura 20:</b> Medição mapa da Grã-Bretanha .....	36
<b>Figura 21:</b> Mapa político do Brasil.....	42
<b>Figura 22:</b> Mapa Regiões de governo e município.....	43
<b>Figura 23:</b> Medição mapa do Rio de Janeiro (1) .....	44
<b>Figura 24:</b> Medição mapa do Rio de Janeiro (2) .....	44
<b>Figura 25:</b> Mapa Região da Costa Verde .....	47
<b>Figura 26:</b> Mapa Região Metropolitana .....	48

**Figura 27:** Mapa da Região das Baixadas Litorâneas .....48

**Figura 28:** Mapa da Região Norte Fluminense.....48

## LISTA DE GRÁFICOS

<b>Gráfico 1:</b> Reta s – Geogebra.....	38
<b>Gráfico 2:</b> Reta t – Geogebra.....	46

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1:</b> Dimensão versus coeficiente de redução .....	30
<b>Tabela 2:</b> Estimativas para medição perímetro da Grã-Bretanha .....	36
<b>Tabela 3:</b> Pares ordenados (1).....	37
<b>Tabela 4:</b> Extensão da costa dos Estados banhados pelo Atlântico.....	42
<b>Tabela 5:</b> Estimativas para medição perímetro do litoral do Estado do Rio de Janeiro .....	44
<b>Tabela 6:</b> Pares ordenados (2).....	45
<b>Tabela 7:</b> Extensão litoral dos Municípios do Estado do Rio de Janeiro .....	46

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CEPERJ – Centro Estadual de Estatísticas, Pesquisas e Formação de Servidores Públicos do Rio de Janeiro.

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

IDEB – Índice de Desenvolvimento da Educação Básica

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

PISA – Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SAEB – Sistema de Avaliação da Educação Básica

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	13
<b>PERCURSO METODOLÓGICO</b> .....	16
<b>CAPÍTULO 1 - A GEOMETRIA DE FRACTAIS – ASPECTOS HISTÓRICOS E INTRODUTÓRIOS</b> .....	17
<b>CAPÍTULO 2 - A GEOMETRIA DE FRACTAIS – ASPECTOS CONCEITUAIS</b> .....	24
2.1 O Conjunto de Cantor.....	24
2.2 Curva de Koch.....	25
2.3 Triângulo de Sierpinski .....	26
<b>CAPÍTULO 3 - A DIMENSÃO FRACTAL</b> .....	28
<b>CAPÍTULO 4 - CONCRETIZANDO A TEORIA</b> .....	33
<b>CAPÍTULO 5 - MÃO NA MASSA – UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE PRÁTICA</b> .	39
5.1 Primeira etapa: Frac o quê? .....	40
5.2 Segunda etapa: Qual a dimensão disso tudo? .....	40
5.3 Terceira etapa: Deu certo no papel. E na natureza, também é possível?.....	41
5.4 Quarta etapa: Nós vamos invadir sua praia! .....	46
5.5 Quinta etapa: Sofri, mas aprendi! .....	49
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	50
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	52

## INTRODUÇÃO

O Brasil, no contexto da educação matemática, apresenta indicadores extremamente baixos em avaliações de larga escala, como é o caso do Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (PISA), o maior estudo sobre educação do mundo. O último PISA, realizado no ano de 2018, revelou que o Brasil tem baixa proficiência em leitura, matemática e ciências, quando comparado aos demais 78 países que realizaram a avaliação. Dados do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) revelam “que 68,1% dos estudantes brasileiros, com 15 anos de idade, não possuem nível básico de matemática, o mínimo para o exercício pleno da cidadania”<sup>1</sup>.

As avaliações do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) corroboram com o resultado apontado pelo PISA, o que pode ser comprovado nas médias que compõem o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB). Desde 2005 o país vem se mostrando em um estado de estagnação no Ensino Médio e desde 2013 os resultados observados estão aquém das metas estabelecidas<sup>2</sup>, o que justifica a preocupação por parte de educadores e da sociedade em geral.

Assim, entendendo que se torna imperativo uma reflexão sobre as práticas de ensino adotadas, bem como a pesquisa e a proposição de metodologias que auxiliem o trabalho docente diante dos dados apresentados acima, surgiu a ideia para o presente trabalho. Não temos a pretensão utópica de resolver o baixo desempenho dos estudantes em matemática, mas de mostrar como a disciplina pode fazer mais sentido quando é contextualizada, quando parte do conhecimento prévio dos estudantes, quando faz conexão com outras disciplinas, quando supera a memorização e a repetição de procedimentos. Defendemos aqui a ideia de que a

[...] aprendizagem é associada à preocupação em retirar o aluno da condição de espectador passivo, em produzir uma aprendizagem significativa e em desenvolver o conhecimento espontâneo em direção ao conhecimento abstrato. É preciso fazer os alunos verem a matemática na vida real, [...] ligar a matemática que se estuda nas salas de aula com a matemática do cotidiano (SOUZA, 2009, p. 15).

No que tange especificamente ao ensino de geometria, a comumente discutida nos Ensinos Fundamental e Médio das escolas brasileiras é a euclidiana, que é aquela que se dá em

---

<sup>1</sup>Disponível em: [http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset\\_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206](http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206)

<sup>2</sup>Consulta realizada em: <http://ideb.inep.gov.br/resultado/resultado/resultadoBrasil.seam?cid=5604623>

duas e três dimensões e possui como base os postulados de Euclides. Apesar disso, ao longo dos anos, surgiram vários estudos geométricos que são considerados não euclidianos e que contribuíram de maneira significativa para avanços em matemática e também fora dela. Isso porque modelos euclidianos se mostram incompletos ou até mesmo inadequados em situações específicas.

Uma dessas vertentes não-euclidianas é a chamada Geometria Fractal, onde se encontra o cerne do presente trabalho. Uma área ainda pouco explorada nas escolas de educação básica e que vem contribuindo para o estudo de comportamentos e propriedades de formas geométricas abstratas com padrões complexos que se repetem infinitamente mesmo quando limitados a uma determinada área.

Em um comparativo:

A Geometria Euclidiana se propõe a estudar formas regulares que quase sempre são feitas pelo homem, já a Geometria Fractal estuda padrões regulares e organizados dentro de uma aparente irregularidade, muito encontradas na natureza. Num universo despovoado de formas geométricas perfeitas, onde proliferam superfícies irregulares, difíceis de representar e medir, a Geometria Fractal apresenta-se como um meio de tratar aqueles fenômenos até agora considerados imprevisíveis, aleatórios e anômalos, ou seja, caóticos (FUZZO, REZENDE & SANTOS, 2009, p. 11).

Não pretendemos aqui fazer críticas à Geometria Euclidiana, pelo contrário. Queremos apenas destacar que, como toda e qualquer ciência, sua abrangência tem se mostrado, ao passar dos anos, limitada, o que em nada põe em dúvida sua importância para a construção do pensamento geométrico.

O termo fractal foi usado pela primeira vez há muito pouco tempo, mais precisamente no ano de 1975, quando Benoit Mandelbrot<sup>3</sup> sentiu a necessidade de nomear a geometria com que buscava representar as formas da natureza. E foi a partir de então que o tema dos fractais começou a ser discutido por pesquisadores que buscam a assimilação e a compreensão dos estudos da natureza com uma geometria não-euclidiana.

Cabe destacar que, apesar de ainda não fazer parte dos currículos oficiais das escolas, sua utilização tem se mostrado importante em diferentes áreas científicas, como aponta Nunes (2006):

A geometria fractal permite a integração de diversos temas da matemática e de outras áreas, desde as ciências naturais às econômico-sociais e à tecnologia. Quando incluída

---

<sup>3</sup>Benoit Mandelbrot foi um matemático francês que trabalhou na *International Business Machines Corporation* (IBM). Ele foi um dos primeiros a usar computação gráfica para criar e exibir imagens geométricas fractais, o que o fez ficar conhecido como o 'Pai da Geometria Fractal'.

no ensino, permite desenvolver o espírito experimental dos alunos de forma a entender a geometria de objetos não tradicionais e de estabelecer modelos matemáticos para auxiliar os estudos dos fenômenos naturais (NUNES, 2006, p. 7).

Além disso, ela está presente no cotidiano, ainda que despercebida pela falta de informação, como nos exemplifica Daga e Castilho (2017):

Em um dia chuvoso quando olhamos para o céu vemos aquelas ramificações que os raios fazem; quando vamos ao supermercado e compramos uma couve-flor, estamos diante de objetos fractais. Com isso, a importância do estudo da Geometria Fractal (DAGA & CASTILHO, 2017, p. 16).

Assim, o presente trabalho une-se aos inúmeros outros que tratam do tema para o Ensino Médio e buscará responder especificamente ao seguinte questionamento: De que maneira podemos explorar a noção de dimensão fractal de objetos complexos com estudantes do Ensino Médio?

Isso porque, como nos coloca Sallum (2005),

A introdução de fractais no Ensino Médio, além de satisfazer a curiosidade de quantos já ouviram falar neles, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzir uma ideia intuitiva do conceito de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométricas e estímulo ao uso de tabelas (SALLUM, 2005, p. 1).

O objetivo desse texto, portanto, é apresentar uma atividade pedagógica que possa contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de dimensões fractais.

## PERCURSO METODOLÓGICO

Foi realizada uma pesquisa bibliográfica para exploração de livros e artigos que tratam da teoria. E, ainda, de dissertações defendidas pelo PROFMAT nos últimos cinco anos e que abordaram a temática, a fim de identificar e compreender as atividades já propostas para o ensino de Geometria de Fractais, o que significa dizer que buscamos compreender para explicar e propor novos caminhos.

A busca pelas dissertações nos permitiu verificar que entre os anos de 2016 e 2020 foram publicados 32 trabalhos que tiveram o tema ‘fractal’ ou ‘fractais’ em seu título. Após examinar os resumos desses 32 trabalhos, constatamos que 2 referem-se especificamente ao Ensino Fundamental; 26 ao Ensino Médio; 3 abordaram o tema com propostas direcionadas simultaneamente aos Ensinos Fundamental e Médio; e 1 trabalho possui uma explanação mais avançada, com uma linguagem matemática mais técnica e propícia a estudantes que cursam o Ensino Superior.

Como o foco do presente artigo é o Ensino Médio, pautamos nossa análise nas 29 dissertações que trataram dessa etapa da educação, cuja leitura se deu de forma pormenorizada. Apenas um dos trabalhos (CRUZ, 2018) tratava especificamente sobre o conceito de dimensão, enfatizando as definições de dimensão topológica e dimensão de Hausdorff com vistas a aplicações em sala de aula, quantitativo baixo em nosso entendimento e, por isso, passível de novas explorações como a que estamos propondo.

Diante disso, elaboramos uma atividade prática que poderá ser aplicada na etapa de ensino mencionada, mostrando a existência de dimensões que fogem do contexto que costumeiramente vimos ser discutido em salas de aula. Assim, almejamos, com tal proposta pedagógica, contribuir para a experimentação e significação da geometria presente em objetos e fenômenos físicos e sociais geralmente não abordada nas aulas de Matemática.

## **CAPÍTULO 1 - A GEOMETRIA DE FRACTAIS – ASPECTOS HISTÓRICOS E INTRODUTÓRIOS**

A geometria, desde as antigas civilizações, sempre esteve intimamente relacionada às necessidades cotidianas. Registros de mais de dois mil anos apontam para o uso dessa área da Matemática para tarefas simples como a divisão de terras em formatos retos e paralelos até o desenvolvimento de tecnologias sobre Topografia e Engenharia Agrônoma, na elaboração de traçados técnicos e dimensionamento de áreas a serem preparados para a produção animal e vegetal.

No campo da Astronomia, babilônios, gregos, chineses e maias já observavam os fenômenos celestes e com a utilização de ferramentas rudimentares calculavam a posição das estrelas. Anos mais tarde, a geometria permitiu que Nicolau Copérnico desenvolvesse a teoria heliocêntrica do sistema solar e, para alguns historiadores das ciências, a partir daí, deu-se início à ciência moderna.

Na Arte e na Arquitetura, paredes de pedras ainda expõem linhas e círculos pintados à mão por nômades caçadores-coletores que viveram no período Paleolítico. Tempos depois, o advento da agricultura permitiu aos humanos fixarem moradias, o que modificou a relação do homem com o ambiente e fez com que as formas geométricas se tornassem cada vez mais complexas. Fato esse que pode ser observado até os tempos atuais com a constante evolução dos moldes utilizados na criação de cabanas, casebres, prédios, palácios, pirâmides, catedrais etc.

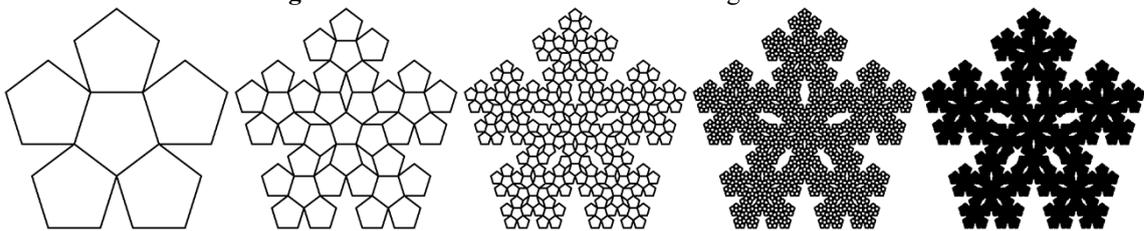
Foi na Grécia, contudo, que a geometria começou a ser tratada como ciência dedutiva. Euclides de Alexandria (aproximadamente entre 323-283 a.C.) foi quem começou a colocá-la em forma de axioma, introduzindo um rigor matemático até então desconhecido (e utilizado até os dias atuais). O matemático unificou todo o conhecimento geométrico produzido em um trabalho composto por treze livros intitulados ‘Elementos’ e seus ensinamentos estão presentes nos currículos das escolas de Educação Básica (ROQUE & PITOMBEIRA, 2012).

Como mencionado na parte introdutória, estudos geométricos que são considerados não euclidianos foram desenvolvidos ao longo do tempo. Temos, nesse sentido, como apontam Vitorio e Primo (2020), a Geometria Diferencial, a Geometria Riemanniana, a Geometria Esférica e a Geometria Fractal.

Muitos matemáticos, físicos, astrônomos, filósofos e profissionais da ciência contribuíram para o surgimento e conceituação da Geometria de Fractais. Em meados de 1500,

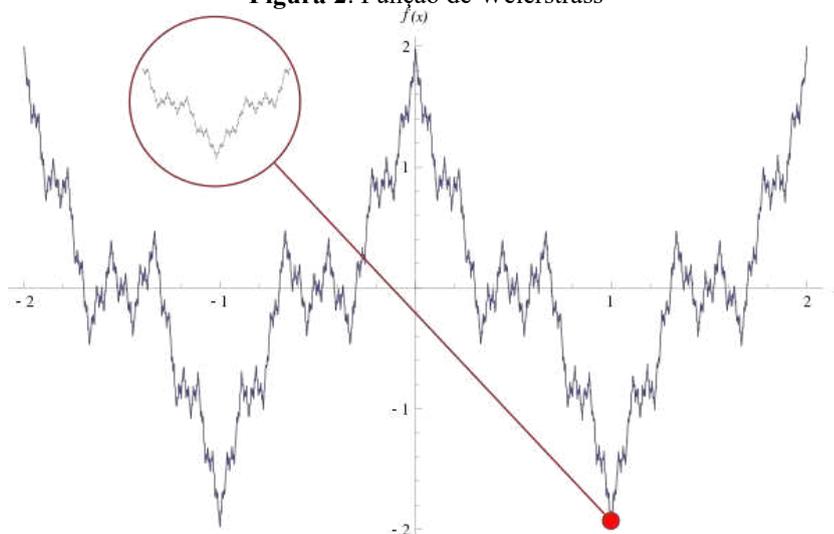
o pintor e matemático Albrecht Dürer (1471-1528) desenvolveu construções a partir de polígonos regulares (pentágonos, hexágonos etc.), gerando os fractais que levam o seu nome, como na figura 1. Séculos mais tarde, em 1872, Karl Weierstrass (1815-1897) impressionou a comunidade matemática ao anunciar um contraexemplo de uma função limitada e contínua que não admitia derivada em nenhum ponto do seu domínio e, quando observada graficamente, verificava-se que o desenho formado possuía uma estrutura fractal, que pode ser observada na figura 2.

**Figura 1:** Processo evolutivo Fractal Pentagonal de Dürer



**Fonte:** <https://onlinemathtools.com/l-system-generator>

**Figura 2:** Função de Weierstrass



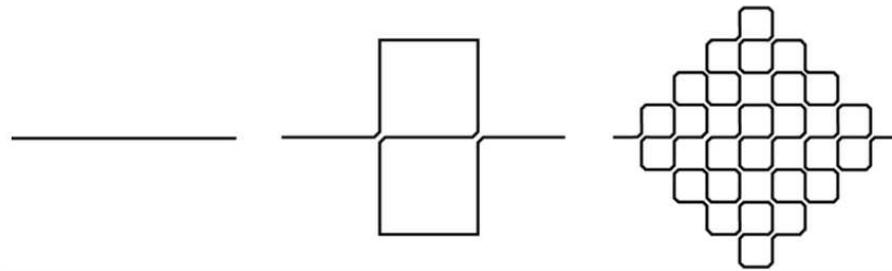
**Fonte:** <https://www.wikiwand.com/pt/Fun%C3%A7%C3%A3odeWeierstrass>

O criador da Teoria dos Conjuntos, George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), desenvolveu ideias revolucionárias sobre a noção de infinito e, em 1883, publicou o chamado Conjunto de Cantor, cuja construção geométrica é reconhecida atualmente como o primeiro objeto fractal (explorada no capítulo 2 adiante). Ainda no século XIX, Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) desenvolveu o chamado Conjunto de Lyapunov, que consiste em um objeto fractal gerado por recorrências, aplicável em sistemas dinâmicos.

Considerado por alguns como o pai da lógica, Giuseppe Peano (1858-1932) publicou, em

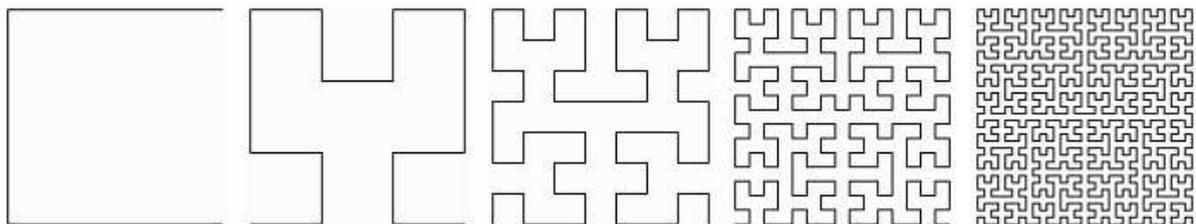
1890, no artigo ‘*Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*’, um exemplo de fractal. Nele, Peano descreveu uma curva formada por uma linha sem espessura capaz de passar por todos os pontos de uma superfície plana tantas vezes necessárias para cobri-la por inteiro, como descrito na figura 3. Era o prenúncio da chamada Curva de Peano, motivando o matemático alemão David Hilbert (1862-1943) a descrever a sua ideia de preenchimento de uma superfície quadrada sem a interseção de pontos, a chamada Curva de Hilbert, que é uma curva de espaço fractal amplamente utilizada em tempos atuais, na Ciência da Computação, e exemplificada na figura 4.

**Figura 3:** Processo evolutivo Fractal Curva de Peano



Fonte: <https://onlinemathtools.com/generate-peano-curve>

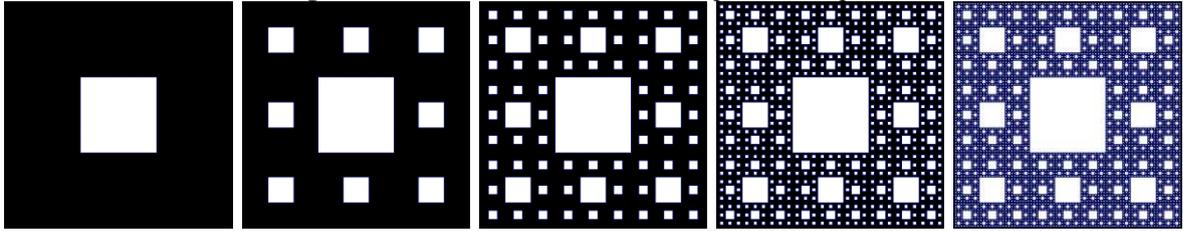
**Figura 4:** Processo evolutivo Fractal Curva de Hilbert



Fonte: <https://onlinefractaltools.com/draw-hilbert-fractal>

Vários objetos matemáticos foram estudados ou criados pelo polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969). O Tapete de Sierpinski, exemplificado na figura 5, e o Triângulo de Sierpinski, a ser apresentado no capítulo 2, aparecem na coleção de fractais considerados clássicos e inspiradores, tanto quanto o famoso Floco de Neve de Koch ou Estrela de Koch (também explorado no capítulo 2). Este último foi publicado em 1906, no artigo intitulado ‘*Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes*’, pelo sueco Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924). Assim como Weierstrass, Koch apresentou as Curvas e a Ilha de Koch como exemplos de curvas contínuas em todo o intervalo, porém não deriváveis em nenhum ponto do seu domínio.

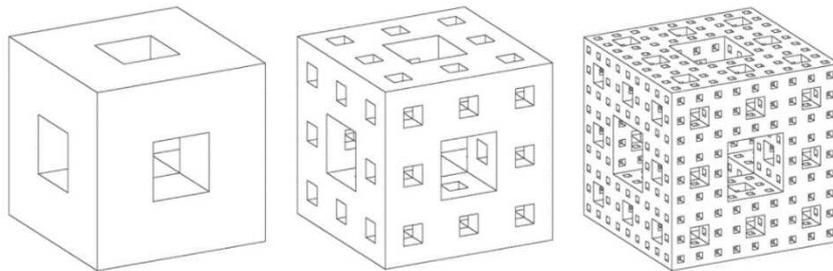
**Figura 5:** Processo evolutivo Fractal Tapete de Sierpinski



Fonte: <https://onlinemathtools.com/generate-sierpinski-carpet>

Os estudos sobre dimensão topológica publicados por Felix Hausdorff (1868-1942) permitiram a criação do conceito de Dimensão de Hausdorff, método matemático futuramente utilizado por Mandelbrot na conceituação e concepção do termo Dimensão Fractal. Os conceitos de dimensão topológica inspiraram também o matemático Karl Menger (1902-1985) a apresentar o objeto conhecido como Esponja de Menger, uma versão tridimensional do Tapete de Sierpinski.

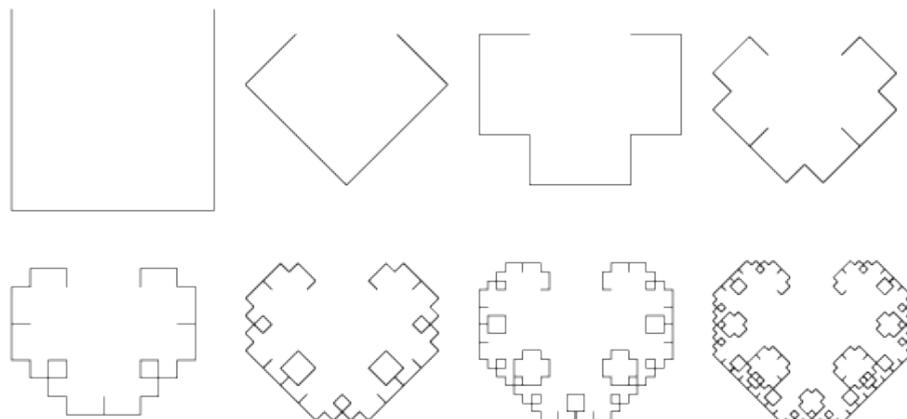
**Figura 6:** Processo evolutivo Fractal Esponja de Menger



Fonte: [https://www.cabinetmagazine.org/issues/24/wertheim\\_mosely.php](https://www.cabinetmagazine.org/issues/24/wertheim_mosely.php)

Paul Pierre Lévy (1886-1971), por sua vez, descreveu a propriedade de autossimilaridade de algumas curvas, dando origem à Curva de Lévy, também conhecida como Curva C.

**Figura 7:** Processo evolutivo Fractal Curva de Lévy



Fonte: <https://mathworld.wolfram.com/LevyFractal.html>

Já no campo dos números complexos, Gaston Maurice Julia (1893-1978) e Pierre Joseph Louis Fatou (1878-1929) publicaram, simultaneamente, trabalhos semelhantes sobre processos iterativos envolvendo números complexos que, mais tarde, vieram a ser conhecidos como Conjuntos de Julia.

Todo esse percurso cronológico<sup>4</sup> nos leva ao ano de 1967, quando Benoit B. Mandelbrot (1924-2010) publicou o artigo '*How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension*', iniciando um novo e importante capítulo sobre a Geometria de Fractal.

Quando convidado para trabalhar na empresa IBM, que garimpava jovens talentos na área científica, Mandelbrot retomou os trabalhos de Julia e Fatou, dando forma aos resultados algébricos com o auxílio de programas de computadores geradores de gráficos, visualizando o Conjunto de Julia pela primeira vez em 1970. Além desse importante trabalho, nomeou de Geometria Fractal os objetos matemáticos desenvolvidos ao longo da história que apresentavam as características de autossimilaridade e podiam ter dimensão conforme definição de Dimensão de Hausdorff.

Os primeiros estudos de Mandelbrot foram registrados em seus livros '*Les objets Fractals, forme, hasard et dimension*' (1975) e '*The Fractal geometry of nature*' (1982). A palavra fractais, segundo o autor, deriva do adjetivo latino '*fractus*', cujo verbo '*frangere*' correspondente significa quebrar. Decorre daí a definição de que as partes da figura geométrica fractal têm a mesma forma ou estrutura que o todo, sendo as suas formas extremamente irregulares, interrompidas e fragmentadas (MANDELBROT, 1982).

Barbosa (2005), por sua vez, definiu que “um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos” (p.18). Já Falconer apud Barbosa (2005) nos coloca a ideia para o entendimento de fractal por meio de caracterizações, como a seguir:

Um conjunto  $F$  é fractal se, por exemplo: -  $F$  possui alguma forma de “autossimilaridade” ainda que aproximada ou estatística; - A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que a sua dimensão topológica; - O conjunto  $F$  pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo (BARBOSA, 2005, p. 18).

Quanto às principais propriedades que caracterizam e delimitam os conjuntos fractais, merecem destaque a autossimilaridade, a complexidade infinita, a irregularidade e a dimensão fractal, como descritas por Barbosa (2005): autossimilaridade, que pode ser exata ou estatística,

---

<sup>4</sup>Para a construção do percurso cronológico, foi consultada a biografia dos matemáticos citados por meio da exploração do site <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Search/>

ou seja, mantém a forma e estrutura sob uma transformação de escala (transformação que reduz ou amplia o objeto ou parte dele); complexidade infinita, isto é, qualquer que seja o número de ampliações de um objeto fractal, nunca obtemos a “imagem final”, uma vez que ela poderá continuar a ser infinitamente ampliada; irregularidade, no sentido de rugosidade (não-suavidade) ou fragmentação; e possuir, em geral, dimensão não-inteira. A dimensão fractal quantifica, de certo modo, o grau de irregularidade ou fragmentação do conjunto considerado.

Dentre as propriedades essenciais dos conjuntos fractais, a autossimilaridade ou autossemelhança é a mais evidente. Perceber que existem, em escalas menores, formas semelhantes a uma figura inicial é o primeiro indicativo de que estamos diante de um fractal.

Stewart (1991) enuncia que um objeto “é autossimilar quando se pode separar uma pequena parte, ampliá-la e recriar assim algo muito parecido com o todo” (p. 219). Nunes (2006) já nos coloca que

Existem muitas formas da natureza que representam estruturas de auto-semelhança e que apesar de não conseguirmos visualizar muitas escalas de ampliação, devem ser discutidas sob o ponto de vista da geometria fractal. Para estas formas da natureza, a noção de auto-semelhança a deve ser vista cuidadosamente e deve ser encarada como auto-semelhança a aproximada (ou estatística), uma vez que, partes destas figuras têm a mesma estrutura ou uma distribuição estatística idêntica, mas não são réplicas exactas destas (NUNES, 2006, p. 32).

Para o autor, a autossemelhança exata só existe em figuras geradas por processos matemáticos em que o conjunto total é formado por pequenas réplicas perfeitas delas mesmas, ou seja, é formado através de um processo iterativo, como é o caso, por exemplo, do Conjunto de Cantor, da Curva de Koch, do Triângulo e do Tapete de Sierpinski.

Quando observamos as formas geométricas presentes na natureza, temos uma autossemelhança estatística, onde o fractal é obtido por processos estocásticos, isto é, gerados por uma coleção de variáveis aleatórias e possui medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em diferentes escalas. São exemplos de autossimilaridade observados na natureza: o curso de um rio, as nuvens, as pequenas rochas das montanhas que se subdividem em grãos de areia ao longo do tempo, as ramificações de relâmpagos que surgem e somem em meio a nuvens carregadas, os pedaços de uma couve-flor que lembram toda a couve-flor, entre outros.

Assim, entendemos que um Fractal Matemático possui autossimilaridade infinita, onde suas partes, em qualquer escala, são idênticas ao todo. No entanto, quando se vislumbra um Fractal Natural, devemos levar em conta as suas limitações e particularidades.

O principal processo para gerarmos um fractal é o chamado de Iteração Infinita ou

Complexidade Infinita. Segundo o dicionário<sup>5</sup>, iteração significa “ação de iterar ou de repetir” ou, ainda, em Álgebra, “procedimento de resultado de uma equação, através de sucessivos cálculos, em que o objeto dessa é o produto daquela que a antecede.”

Carvalho (2005) classifica os processos iterativos, dentro da Geometria de Fractais, em dois tipos: algébricos e geométricos. Na iteração algébrica, a rotina se dá por meio de uma equação na qual temos um valor inicial para um  $x_0$  que representa a configuração inicial da figura, e a partir de tal configuração, devemos encontrar  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}$ .

Já na iteração geométrica, o processo de repetição se dá a partir de uma figura geométrica ou parte dela. Em geral, a regra induz uma quebra de suas arestas ou uma fragmentação de sua superfície, a fim de se obter uma reprodução, em menor escala, da figura inicial. A cada iteração, a figura produz cópias de si mesma e, quando aplicado indefinidamente, ou seja, quanto maior for o número de iterações deste processo, mais detalhes serão apresentados e, assim, nunca chegaremos a uma imagem finalizada. Esse processo exprime a ideia de complexidade infinita.

---

<sup>5</sup>Disponível em <https://www.dicio.com.br/iteracao/>

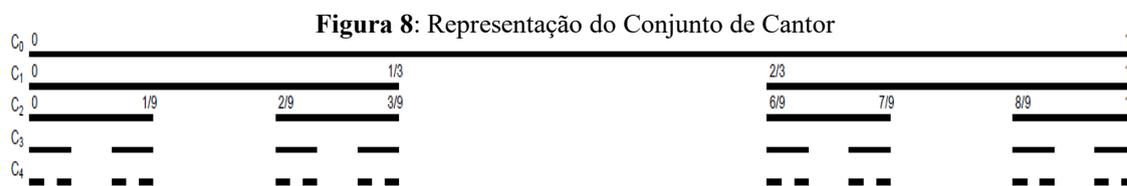
## CAPÍTULO 2 - A GEOMETRIA DE FRACTAIS – ASPECTOS CONCEITUAIS

Como dito inicialmente, alguns fractais assumem papel relevante dentro da Geometria Fractal por serem pioneiros e apresentarem características próprias. Eles possuem estruturas geométricas intuitivas e de fácil construção, pois são gerados por transformações do próprio objeto nele mesmo, como os que serão explorados a seguir: o Conjunto de Cantor, a Curva e o Floco de Neve de Koch e o Triângulo de Sierpinski.

### 2.1 O Conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor é considerado o modelo ou a estrutura básica para o desenvolvimento de diversos outros fractais. Trata-se de um subconjunto do intervalo  $[0,1]$ , formado por infinitos pontos que se acumulam uns nos outros, mas que não contém nenhum intervalo de números reais.

Geometricamente, sua construção se dá com a retirada de determinada parte de um segmento de reta e a repetição desse processo com as partes restantes, o que permite observar com mais clareza tratar-se de uma estrutura fractal. Para tanto, começamos com um segmento de reta (que consideraremos como sendo de comprimento unitário: uma extremidade corresponde ao zero da reta real e a outra ao número 1) e o dividimos em três partes iguais. Retiramos a parte central, ou terço médio, permanecendo os segmentos das extremidades. Repetimos o procedimento nos dois segmentos restantes de comprimento  $1/3$ , ou seja, correspondendo aos intervalos fechados  $[0, 1/3]$  e  $[2/3, 1]$ . Dessa forma, o próximo passo sucede em quatro segmentos de tamanho  $1/9$ , representado pelos intervalos fechados  $[0, 1/9]$ ,  $[2/9, 3/9]$ ,  $[6/9, 7/9]$  e  $[8/9, 1]$ , como pode ser observado na imagem a seguir.



Fonte: Elaborado pelo autor

A repetição indefinida desse processo resulta no conjunto de Cantor, que é formado pelos pontos que pertencem aos intervalos que ficaram. Notemos que, em cada etapa da construção, é possível afirmar que o conjunto observado é uma coleção de cópias exatas e reduzidas do

todo, ou seja, o conjunto é autossemelhante. A cada iteração na construção do conjunto de Cantor, dobramos o número de intervalos cujos comprimentos são  $\frac{1}{3}$  do comprimento dos intervalos da etapa anterior. Assim, na  $n$ -ésima iteração, temos o conjunto  $C_n$  constituído de  $2^n$  segmentos de comprimento  $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ , ou seja,  $|C_n| = 2^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

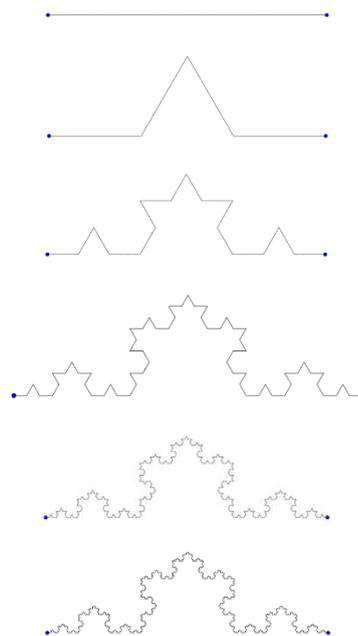
O conjunto de Cantor  $C$  é definido quando  $n$  tende a infinito e, por consequência, possui comprimento nulo, já que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |C| = \lim_{n \rightarrow \infty} |C_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

## 2.2 Curva de Koch

A Curva de Koch possui aspecto estritamente geométrico, cuja construção se dá a partir de um processo recursivo, o qual dividimos um segmento de reta de comprimento  $l$  em três partes iguais. Na sequência, substituímos o segmento médio por dois segmentos iguais, de modo que os dois novos segmentos formem um triângulo equilátero “sem base”. Dessa forma, é possível obter uma curva formada por quatro segmentos de mesmo comprimento. Repetimos indefinidamente esse processo em cada um dos segmentos restantes e teremos a curva que deu origem ao fractal conhecido como Curva de Koch.

**Figura 9:** Processo evolutivo da Curva de Koch

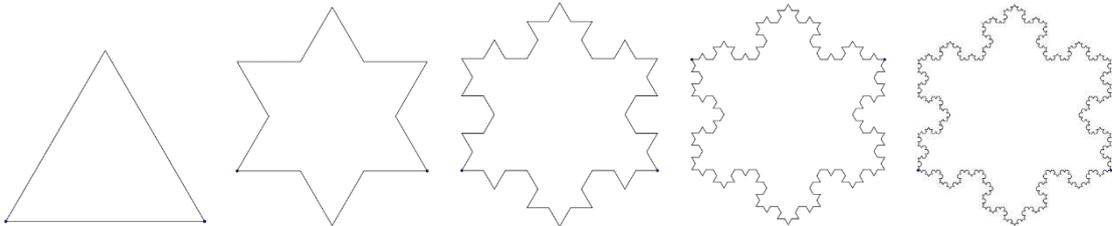


**Fonte:** Elaborado pelo autor

Essa construção nos permite observar que a curva é autossimilar em toda a sua estrutura. Isso significa dizer que não importa o quão pequena e detalhada ela seja, sempre encontraremos cópias reduzidas do todo. A construção se dá de forma que, a cada nova iteração realizada, quadruplicamos o número de segmentos obtidos no processo anterior, mas com comprimento  $\frac{1}{3}$  menor, isto é, na  $n$ -ésima iteração a curva  $K_n$  é formada por  $4^n$  segmentos de comprimento  $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ , donde  $|K_n| = \left(\frac{4}{3}\right)^n l$ .

Uma derivação dessa curva é o fractal conhecido como Floco de Neve de Koch ou Ilha de Koch. O processo de construção dele é semelhante à Curva de Koch, no entanto inicia-se com um triângulo equilátero e os processos iterativos são realizados nos lados do triângulo de lado  $l$ .

**Figura 10:** Processo evolutivo da Ilha de Koch



**Fonte:** Elaborado pelo autor

Novamente temos uma estrutura autossimilar, já que a cada nova iteração quadruplicamos o número de lados presentes na etapa anterior, mas dividimos seu comprimento por 3, ou seja, na  $n$ -ésima iteração a poligonal  $N_n$  é formada por  $3 \cdot 4^n$  lados, cujo perímetro mede  $P_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot l$ .

Em particular, os perímetros  $P_n$  tendem ao infinito quando  $n$  tende a infinito:

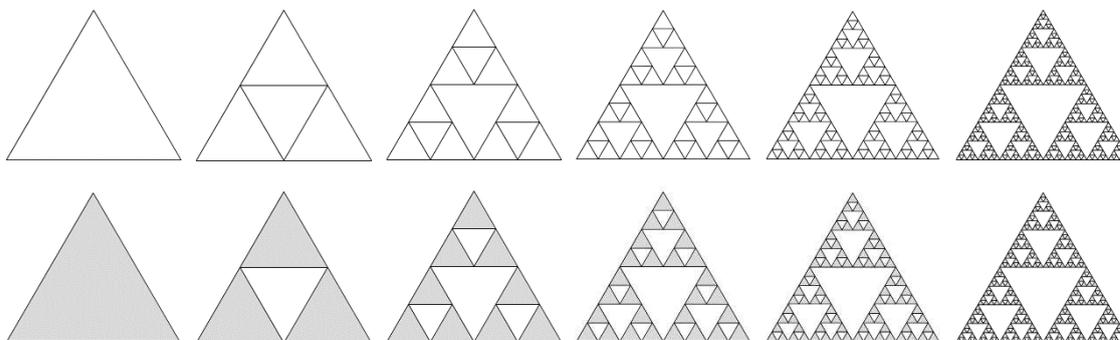
$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot l = 3 \cdot l \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty, \text{ pois } \frac{4}{3} > 1.$$

### 2.3 Triângulo de Sierpinski

Assim como o Conjunto de Cantor, a construção do Triângulo de Sierpinski é feita por meio de infinitas iterações de remoção de partes da figura original. Para tal, começamos marcando os pontos médios dos lados do triângulo equilátero de lado  $l$  e área  $A$  no plano. Unindo esses pontos formamos um novo triângulo, o que gera quatro triângulos congruentes dos quais removemos o do centro. Em cada um dos três triângulos remanescentes, repetimos o

processo infinitamente até formar o fractal chamado Triângulo de Sierpinski, como na imagem abaixo:

**Figura 11:** Processo evolutivo do Triângulo de Sierpinski



**Fonte:** Elaborado pelo autor

A estrutura formada é visivelmente autossemelhante, já que obtemos de forma escalonada novas figuras numa versão reduzida. A cada iteração, a figura  $S_n$  possui  $3^n$  triângulos, cujos lados medem metade do lado do triângulo anterior e cujas áreas medem  $\frac{1}{4}$  das áreas que lhe deram origem. Assim, o perímetro e área de  $S_n$  podem ser obtidos por meio das fórmulas  $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot l$  e  $\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot A$ , respectivamente. A cada iteração realizada, o perímetro sofre um aumento de 50%, enquanto a área total sofre uma redução de 25%, de forma que a iteração infinita do fractal ocasiona um crescimento exponencial do perímetro e a degeneração da área tendendo à zero.

### CAPÍTULO 3 - A DIMENSÃO FRACTAL

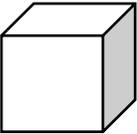
Apresentadas as principais propriedades de alguns fractais, discutiremos agora a dimensão fractal<sup>6</sup>, que está relacionada ao grau de irregularidade, aspereza e fragmentação dos objetos. Essa medida representa o comportamento do fractal, sendo ele uma figura ou a representação de um fenômeno matemático, biológico, físico ou social.

Nos últimos anos, o conceito de dimensão evoluiu enormemente dentro da comunidade científica. Tal evolução é citada por Peitgen, Jürgens e Saupe (2004), que destacam a importância de se escolher, dentre vários métodos, o mais adequado para medir um determinado objeto ou sistema:

Dimensão não é fácil de entender. Na virada do século, foi um dos maiores problemas em matemática determinar o significado de dimensão e quais propriedades ela tem. E desde então a situação tem sido um pouco pior porque os matemáticos chegaram a uma dezena de noções diferentes de dimensão: dimensão topológica, dimensão Hausdorff, dimensão fractal, dimensão de autossimilaridade, dimensão de contagem de caixas, dimensão de capacidade, dimensão de informação, dimensão euclidiana, e mais. Todas elas estão relacionadas. Algumas delas, entretanto, fazem sentido em certas situações, mas não em outras, onde definições alternativas são mais úteis (PEITGEN, 2004, p. 192, tradução do autor).

Em modos práticos, o conceito de dimensão descrito nos livros de Euclides simplifica a ideia de que o ponto possui dimensão zero, pois é definido como um objeto que não possui grandeza ou forma. Fazer medições em uma linha, por sua vez, nos limita a mover-se apenas em seu comprimento, definindo assim um objeto com apenas uma dimensão. Objetos de forma plana, com possibilidade de aferir comprimento e largura, no entanto, tornam-se modelos de duas dimensões. Já os objetos que além do comprimento e da largura possuem altura, também chamados de Sólidos Geométricos, são exemplos de objetos tridimensionais.

**Figura 12:** Exemplos de dimensões

Ponto	Reta	Plano	Cubo
● A			
Sem dimensão	Uma dimensão	Duas dimensões	Três dimensões

Fonte: Elaborado pelo autor

<sup>6</sup> A definição rigorosa de dimensões foge aos objetivos deste texto. Para o leitor que desejar conhecer um pouco mais, deixamos como sugestão o livro de K. Falconer, *Fractal Geometry*, John Wiley & Sons Ltd., 1990.

Ampliando a percepção de dimensão da Geometria Euclidiana, o matemático e filósofo René Descartes descreveu a chamada Geometria Analítica. Nessa nova ótica, as dimensões de um objeto correspondem ao número de informações ou coordenadas necessárias para descrever com clareza a localização de seus pontos.

No caso de uma reta infinita, temos um espaço **unidimensional**, pois basta conhecer apenas um valor para se posicionar corretamente em um local específico nessa reta, a saber, sua distância a um ponto fixado desta reta e tomado como sua “origem”. No plano, temos um espaço **bidimensional**, onde duas coordenadas são necessárias para identificar qualquer ponto pertencente a esse plano. No espaço **tridimensional**, passam a ser necessários três valores para obter o posicionamento. Analiticamente, esse mesmo conceito pode ser aplicado indefinidamente para  $n$  dimensões.

A origem das dimensões fractais está nos escritos de Felix Hausdorff (1868-1942). Abram Samoilovitch Besicovitch (1891-1970) aperfeiçoou esse trabalho e avançou no conceito de dimensões fracionadas, permitindo que Mandelbrot transformasse a representação de fractal de um modelo intuitivo para um modelo matemático.

No entanto, demonstrar de maneira formal tal definição é extremamente complicado e excede o contexto deste trabalho. Assim, optamos por determinar a dimensão fractal em objetos com autossimilaridade, que não possuem, necessariamente, uma dimensão inteira.

Utilizando elementos da Geometria Euclidiana, apresentaremos uma análise do conceito de dimensão por meio de conjuntos autossimilantes. Denotaremos por  $D$  a dimensão a ser determinada, por  $N$  o número de cópias de si mesmo e por  $r$  o fator de redução, o que permitirá obtermos uma fórmula que expressa a dimensão fractal de um objeto.

Dimensão 1: Seja um segmento de reta dividido em duas partes iguais,  $N = 2$ . Cada um dos dois novos segmentos formados possui um fator de redução  $r = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1$  do segmento original.

**Figura 13:** Segmento dividido em partes iguais

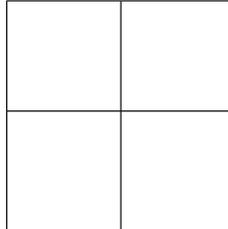


**Fonte:** Elaborado pelo autor

Dimensão 2: Considerando um quadrado e dividindo cada lado em duas partes iguais, de

forma a obter quatro novos quadrados,  $N = 4 = 2^2$ . Cada novo quadrado formado teve um fator de redução  $r = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$  da figura original.

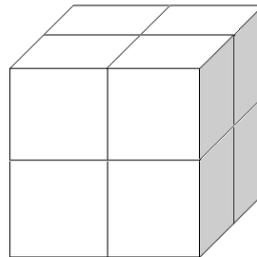
**Figura 14:** Quadrado dividido em partes iguais



**Fonte:** Elaborado pelo autor

Dimensão 3: Agora, dividimos um cubo em 8 cubos idênticos,  $N = 8 = 2^3$ . Assim, cada novo cubo formado terá fator de redução  $r = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$  do sólido original.

**Figura 15:** Cubo dividido em partes iguais



**Fonte:** Elaborado pelo autor

De modo geral, quando dividimos um objeto de forma a obter uma redução de coeficiente  $r$ , a dimensão estará retratada no expoente a que devemos elevar  $\frac{1}{r}$  para se recuperar o número de cópias idênticas da figura original. Veja a tabela abaixo.

**Tabela 1:** Dimensão versus coeficiente de redução

Dimensão 1	Dimensão 2	Dimensão 3
$2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^1$	$4 = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2$	$8 = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^3$

**Fonte:** Elaborado pelo autor

Assim, podemos escrever a relação:

$$N = \left(\frac{1}{r}\right)^D$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados da igualdade, temos:

$$\log N = \log \left(\frac{1}{r}\right)^D$$

$$\log N = D \cdot \log \left(\frac{1}{r}\right)$$

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{r}\right)}$$

De posse de uma expressão que permite calcular a dimensão  $D$  de objetos fractais ou não fractais que possuem auto-semelhança exata em função de  $N$  e  $r$ , veremos agora a dimensão de alguns fractais clássicos citados anteriormente.

O Conjunto de Cantor é constituído pela divisão em três partes iguais a cada iteração, ou seja,  $r = \frac{1}{3}$ , resultando em 2 segmentos que serão reduzidos novamente ( $N = 2$ ).

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\log 2}{\log \left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{\log 2}{\log 3} \cong \frac{0,30102}{0,47712} \cong 0,63091 \cong 0,63.$$

Já a Curva de Koch é formada pela divisão de um segmento em três partes iguais a cada iteração, ou seja,  $r = \frac{1}{3}$ , substituindo o segmento central por dois novos de mesmo tamanho, resultando em 4 segmentos que serão reduzidos novamente ( $N = 4$ ).

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\log 4}{\log \left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{\log 4}{\log 3} \cong \frac{0,60205}{0,47712} \cong 1,26184 \cong 1,26.$$

No que diz respeito a Ilha de Koch, ela é montada com a aplicação da construção da Curva de Koch sobre os lados de um triângulo equilátero, a cada iteração tem-se um fator de redução  $r = \frac{1}{3}$ , resultando em 4 segmentos que serão reduzidos novamente ( $N = 4$ ).

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\log 4}{\log \left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{\log 4}{\log 3} \cong \frac{0,60205}{0,47712} \cong 1,26184 \cong 1,26.$$

Por fim, o Triângulo de Sierpinski é gerado após a remoção do triângulo central formado pelos pontos médios de um triângulo equilátero. A cada iteração tem-se um fator de redução  $r = \frac{1}{2}$ , resultando em 3 novos triângulos que serão reduzidos novamente ( $N = 3$ ).

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\log 3}{\log \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{\log 3}{\log 2} \cong \frac{0,47712}{0,30102} \cong 1,58501 \cong 1,58.$$

## CAPÍTULO 4 - CONCRETIZANDO A TEORIA

Vimos no capítulo anterior que o conceito de dimensão fractal aplicado à fractais clássicos descreve o nível de fragmentação ou irregularidade de uma figura autossimilar. Dessa forma, para fractais geométricos que possuem estruturas intuitivas, geradas por transformações em níveis de escala sobre ele mesmo, o cálculo da dimensão acaba sendo uma tarefa fácil.

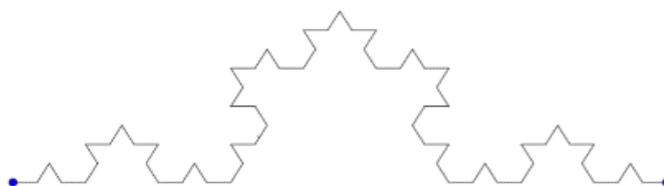
Vimos, ainda, que a Curva de Koch e a Ilha de Koch são fractais com dimensão  $D = 1,26$  e possuem o perímetro calculável em função do número de iterações e do comprimento inicial do segmento que origina a figura. No entanto, quando o número de iterações tende ao infinito, o perímetro da figura também tende ao infinito.

No mundo real, pensar que a medida do perímetro de um objeto possa ter tamanho infinito pode parecer uma ideia inusitada, entretanto, comparar figuras fractais com objetos reais e concretos pode ser possível.

Mandelbrot (1982) nos diz que “nuvens não são esferas, montanhas não são cones, os litorais não são círculos, a casca das árvores não é lisa e tampouco o relâmpago viaja em linha reta” (p.1, tradução do autor), o que nos faz refletir sobre como enxergamos a natureza que está a nossa volta e qual a real forma desses corpos. Fazendo um paralelo com os conceitos apresentados nesse trabalho de pesquisa, podemos fazer alguns questionamentos (que podem ser amplamente discutidos em sala de aula!): Os fractais clássicos apresentados podem ser comparados com objetos reais encontrados na natureza? As linhas que delimitam fronteiras e litorais podem ser comparadas com objetos fractais? As propriedades geométricas do fractal Ilha de Koch podem ser relacionadas com as de uma ilha real localizada num ponto qualquer do planeta? Se essas comparações forem possíveis, poderemos fazer uma projeção e calcular a dimensão desses objetos ou regiões?

Para iniciar tais reflexões, podemos comparar a curva de Koch com o mapa da Península de Banks, localizada na Nova Zelândia?

**Figura 16:** Curva de Koch



**Fonte:** Elaborado pelo autor

**Figura 17:** Mapa da Península de Banks

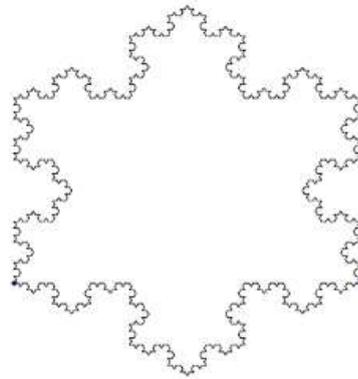


**Fonte:** <https://earthobservatory.nasa.gov/images/148499/banks-peninsula-new-zealand>

É possível observar alguma semelhança entre as figuras?

E entre a Ilha de Koch e o mapa da ilha Kaho'olawe, a menor das oito ilhas vulcânicas do Haváí?

**Figura 18:** Ilha de Koch



**Fonte:** Elaborado pelo autor

**Figura 19:** Mapa da ilha Kaho'olawe



**Fonte:** <https://earthobservatory.nasa.gov/images/146466/healing-scars-at-kaoolawe>

Para responder a esses questionamentos, nos apoiaremos nos conceitos que Benoit Mandelbrot publicou em seu artigo *“How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension”*, de 1967, onde é apresentada uma aplicabilidade da geometria fractal na caracterização das complexas linhas costeiras da Grã-Bretanha, a partir do uso de um único valor de dimensão fractal ( $D$ ) como reflexo de tal complexidade.

Cabe mencionar que a exibição de um valor que possa aferir a real extensão de uma linha costeira vai depender do quão atento o agrimensor está para observar os detalhes dos recortes dessa linha, bem como do tamanho da régua utilizada para fazer tal medição.

As aulas de Geografia nos ensinam que os mapas são ilustrações ou reproduções reduzidas de uma determinada área ou região, enquanto a escala cartográfica é a relação de proporção entre a região real mapeada e sua representação no papel. Assim, munido de uma régua ou um compasso e da escala utilizada no desenho, é possível contornar um mapa com segmentos de reta, somar as medidas e calcular a proporção com a utilização da escala. Tal estratégia permite a execução de forma simples e prática da medição do perímetro de um mapa qualquer e, por consequência, do tamanho real da região.

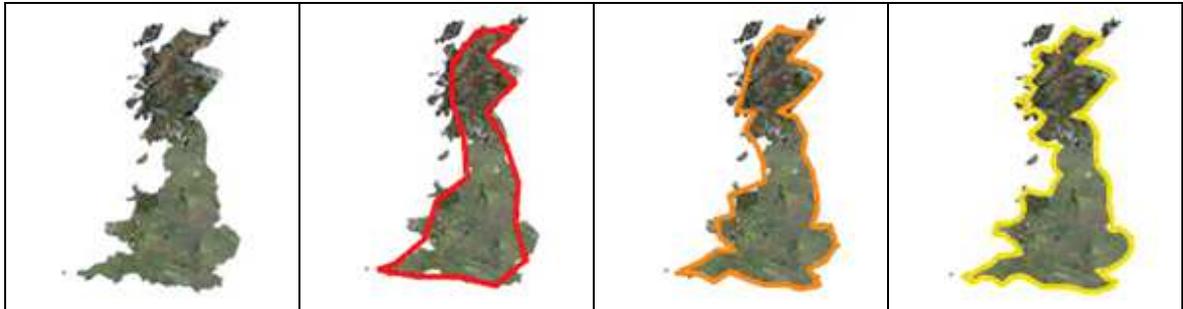
Apesar disso, se ousarmos caminhar exatamente no bordo da região e utilizar cada passo dado como uma unidade de medida, certamente teríamos um valor superior ao encontrado anteriormente e, sem qualquer perda de generalidade, quando estivéssemos em uma região litorânea, continuaríamos aproximando ainda mais do valor real se pudéssemos medir meticulosamente o comprimento do contorno de cada rocha, manguezal, duna ou faixa de areia que compõem a geomorfologia dessa região. Aumentando o nível de detalhamento da região a ser percorrida em níveis microscópicos, o recorte do litoral tomaria forma fractal, pois teríamos que medir o contorno de cada grão de areia ou fragmento de coral que estivesse no limite extremo entre a região emersa e submersa.

Assim como na Curva de Koch, o perímetro de uma região litorânea fica cada vez maior à proporção que vamos nos aproximando de medidas infinitamente pequenas. Dessa forma, podemos utilizar o conceito de dimensão fractal como uma ferramenta extremamente útil para descrever a linha de uma costa compreendida em um litoral.

Para fazer a estimativa, mostraremos um método ligeiramente diferente do que já foi apresentado nos capítulos anteriores para o cálculo de dimensão, de forma a observar o comportamento do perímetro do mapa  $L$  em função do tamanho da régua utilizada para medir o mapa. Para isso, iremos utilizar réguas de comprimentos cada vez menores  $G_0, G_1, G_2, \dots, G_n$ , em escala com fator de redução  $r$  dessa régua e  $N$  como o número de vezes que a régua é

utilizada para contornar a figura, como mostrado a seguir.

**Figura 20:** Medição mapa da Grã-Bretanha



Fonte: <https://fractalfoundation.org/OFC/OFC-10-4.html>

**Tabela 2:** Estimativas para medição perímetro da Grã-Bretanha

	<span style="color: red;">—</span>	<span style="color: orange;">—</span>	<span style="color: yellow;">—</span>
Grã-Bretanha	$G_0 = 200 \text{ km}$ $N = 12$ $L = 2.400 \text{ km}$ $r = 1$	$G_1 = 100 \text{ km}$ $N = 28$ $L = 2.800 \text{ km}$ $r = \frac{1}{2}$	$G_2 = 50 \text{ km}$ $N = 69$ $L = 3.450 \text{ km}$ $r = \frac{1}{4}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Analisando o valor de  $N$ , é fácil perceber que a cada redução aumenta-se o número de réguas necessárias para contornar a figura, tal como o valor do perímetro medido em função de  $G$ . De fato, quando  $r = 1$ , o contorno resume-se a 12 “unidades de régua” e no próximo passo  $N$  aumenta para 28 unidades sem estabelecer uma relação de proporcionalidade com a razão  $r$ . Isso significa que reduzir inúmeras vezes o tamanho da régua pela metade não estabelece uma taxa de crescimento de modo a duplicar o perímetro ou o número de vezes que a régua é usada para contornar a figura.

Para relacionar essas medidas com a dimensão, Mandelbrot (1967) utiliza a seguinte relação de proporcionalidade:

$$L \propto K \cdot (G)^{1-D},$$

onde  $K$  é uma constante.

Para fins de cálculo, temos que a razão é dada por  $r = \frac{G}{G_0}$  e  $N = \frac{L}{G}$ , e, como vimos no capítulo 3, a relação entre as partes de uma figura autossemelhante e a dimensão é dada por:

$$N = \left(\frac{1}{r}\right)^D$$

Substituindo, tem-se:

$$\frac{L}{G} = \left( \frac{1}{\frac{G}{G_0}} \right)^D$$

$$\frac{L}{G} = \left( \frac{G_0}{G} \right)^D$$

$$L = \frac{G \cdot G_0^D}{G^D}$$

$$L = G_0^D \cdot G^{1-D}$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados da igualdade, temos:

$$\log L = \log (G_0^D \cdot G^{1-D})$$

$$\log L = \log G_0^D + \log G^{1-D}$$

$$\log L = \log G_0^D + (1 - D) \log G$$

Tomando a constante  $K = G_0^D$ , temos:

$$\log L = \log K + (1 - D) \log G$$

A equação pode ser interpretada como uma equação reduzida da reta:  $y = b + m \cdot x$

$$\begin{array}{|c|} \hline Y \\ \hline \log L \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline \log K \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline m \\ \hline (1 - D) \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \log G \\ \hline \end{array}$$

Daí, podemos determinar a dimensão  $D$  como o coeficiente angular  $m$  da reta  $s$  que passa pelos pontos associados aos pares ordenados  $(x, y)$ , onde  $x = \log G$  e  $y = \log L$ . Importante mencionar que, para melhor compreensão, todos os cálculos de logaritmos utilizados no presente trabalho foram aproximados para duas casas decimais.

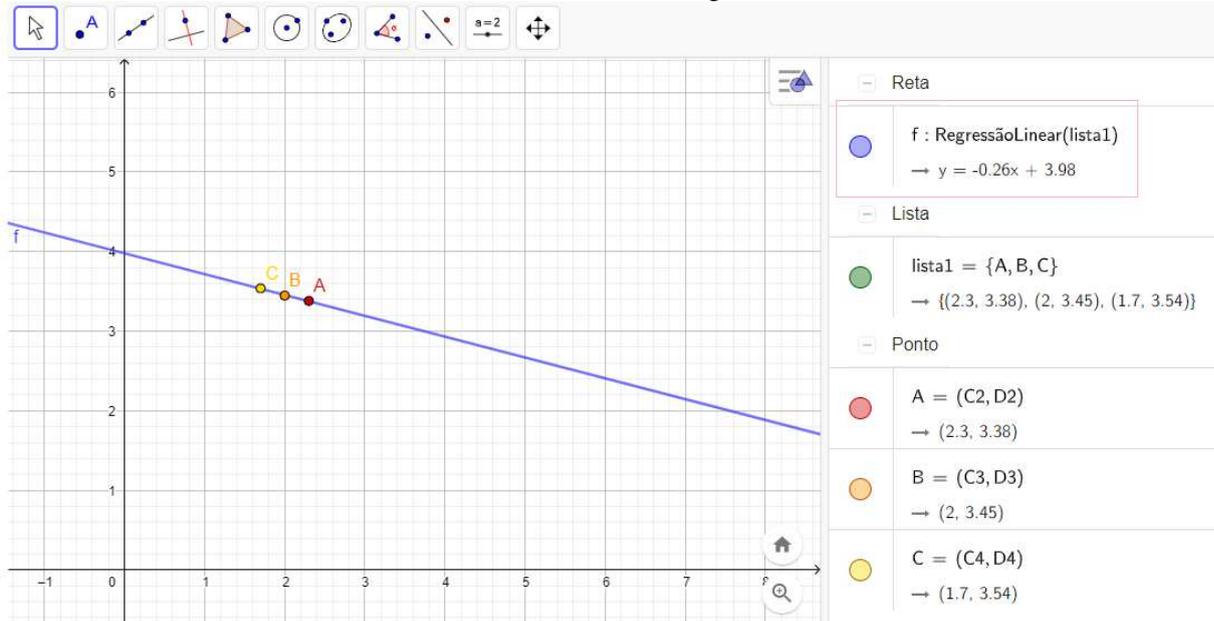
**Tabela 3:** Pares ordenados (1)

G	L	Log G	Log L	(x, y)
200	2.400	2,30	3,38	A = (2,3 , 3,38)
100	2.800	2,00	3,45	B = (2 , 3,45)
50	3.450	1,70	3,54	C = (1,7 , 3,54)

**Fonte:** Elaborado pelo autor

Com a utilização do *software* Geogebra, podemos plotar os pontos no plano cartesiano e observar a equação da reta que mais se aproxima dos pontos A, B e C, como no Gráfico 1 abaixo:

Gráfico 1: Reta s – Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

De posse da equação da reta  $s$  gerada pelo Geogebra, podemos fazer uma associação à equação que relaciona o perímetro em função da régua com a dimensão fractal, como pode ser visto a seguir.

Equação reduzida da reta:	$y$	=	$b$	+	$m$	·	$x$
Equação cálculo dimensão D:	$\log L$	=	$K$	+	$(1 - D)$	·	$\log G$
Equação da reta $s$ (Geogebra):	$y$	=	3,98	+	- 0,26	·	$x$

A seguir, calculamos a dimensão  $D$ :

$$(1 - D) \cong -0,26$$

$$D \cong 1,26$$

Portanto, de acordo com os dados apresentados, podemos estimar a dimensão fractal da ilha da Grã-Bretanha sendo  $D \cong 1,26$ .

A ideia de associar a dimensão fractal ao coeficiente linear de uma reta nos permite compreender a velocidade com que o perímetro altera quando reduzimos o tamanho da régua e, embora pareça uma medição aleatória, trata-se de uma aferição muito mais precisa do que os valores assumidos pelo perímetro, que sofre variações mais extremas.

## CAPÍTULO 5 - MÃO NA MASSA – UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE PRÁTICA

Defendendo a ideia de que a maneira como uma atividade é elaborada e apresentada pode contribuir sobremaneira para o processo de ensino e aprendizagem, pensamos na proposta a seguir para o ensino do cálculo de dimensões fractais em turmas de Ensino Médio. Tal atividade foi inspirada nos escritos de Mandelbrot (1967).

Cabe ressaltar que corroboramos com Candau e Koff (2015), quando nos colocam que

[...] é necessário buscar novos caminhos e/ou alternativas que possam ser mobilizadas e apropriadas, na perspectiva da reinvenção dessa escola que entendemos precisa ser mais plural, democrática, capaz de responder aos desafios de nossa contemporaneidade e de formar cidadãos e cidadãs, sujeitos da construção de um mundo menos dogmático e mais solidário (p. 334).

No entanto, temos consciência de que a atividade proposta não é viável para todos os contextos. Reconhecemos as dificuldades que, infelizmente, se fazem presentes, sobretudo àquelas relacionadas ao currículo engessado e tradicional que busca atender às avaliações em larga escala, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Soma-se a isso o fato de o tema fractal ser extenso, o que implica, necessariamente, alguns encontros para ser trabalhado e, ainda, possuir uma certa complexidade, o que exige determinado nível de conhecimento matemático por parte dos estudantes, podendo dificultar o processo de aprendizagem.

Dadas as especificidades de cada realidade escolar e defendendo ser urgente a reinvenção da escola, o que “pressupõe, entre outros aspectos, colocar em debate o modo de viver o currículo e/ou a prática educativa” (CANDAU & KOFF, 2015, p. 335), sugerimos, para além da sequência apresentada a seguir, que a atividade seja realizada por meio de um projeto, de uma atividade extra, de uma oficina que culmine em uma feira ou evento, em um Programa de Iniciação Científica Júnior, ou qualquer outra estratégia que favoreça a aprendizagem de um tema pouco explorado, mas tão presente em nossa realidade.

A atividade tem, portanto, o objetivo de levar o aluno, por meio de um processo atrativo e interativo, a conhecer os fractais e a compreendê-los como uma alternativa para a identificação de características presentes na natureza (e que a geometria euclidiana não é capaz de explicar).

É importante, ainda, que o docente se apoie nas estratégias e conceitos matemáticos apresentados no capítulo 4, a fim de reconhecer as aplicabilidades de logaritmos, equações exponenciais, regressão linear e geometria analítica.

### 5.1 Primeira etapa: Frac o quê?

A primeira etapa da atividade deverá ser utilizada para mostrar aos estudantes a ideia de se ter um modelo de geometria, diferente da euclidiana tradicional, destinado a descrever, analisar e modelar as formas encontradas na natureza. Esse novo termo, Fractal, que, apesar de ter sido criado recentemente por um matemático nascido em 1924, deverá ser apresentado de forma a compor uma abordagem histórica.

Para isso, sugerimos que os estudantes façam uma pesquisa sobre o termo fractal com o uso dos próprios celulares a fim de que as descobertas componham o debate mediado pelo professor. Além disso, propomos que seja construído um mural online colaborativo com as imagens encontradas pelos alunos. O mural funcionará como uma folha de papel, onde serão inseridas, conjuntamente, as imagens de forma *online*. Para esse processo, pode ser utilizada o aplicativo Padlet<sup>7</sup> (ou outra ferramenta qualquer que cumpra essa função), que permite essa organização, além de possuir uma versão gratuita e bastante intuitiva.

A ideia é explorar o surgimento de figuras que destoam do senso comum entre os matemáticos, ao longo dos anos, e expor os fractais mais elementares: o Conjunto de Cantor, as Curvas de Koch e o Triângulo de Sierpinski. Revelar exemplos na natureza que possuem autossimilaridade exata e estatística, complexidade infinita, irregularidade, bem como, mostrar algumas características algébricas e geométricas dessas figuras, tais como processos recursivos, medidas de perímetro e área.

### 5.2 Segunda etapa: Qual a dimensão disso tudo?

No segundo momento, a proposta é explorar, juntamente com os estudantes, as noções mais fundamentais do conceito de dimensão euclidiana. Importante ressignificar elementos geométricos básicos, já conhecidos pelos estudantes, como ponto, reta e plano, e ampliar a percepção que trata de dimensão estimada com números inteiros para a ideia de se ter dimensões fracionadas, mesmo que isso fuja de qualquer pensamento convencional.

Nessa etapa, sugere-se, ainda, definir o que é dimensão fractal, apresentando um modelo de cálculo para autossimilaridade exata, e calcular a dimensão fractal das figuras já apresentadas na primeira etapa.

---

<sup>7</sup>Disponível para download em <https://padlet.com/>

### **5.3 Terceira etapa: Deu certo no papel. E na natureza, também é possível?**

A etapa três prevê o resgate dos questionamentos trazidos no capítulo 4: Os fractais clássicos apresentados podem ser comparados com objetos reais encontrados na natureza? As linhas que delimitam fronteiras e litorais podem ser comparadas com objetos fractais? As propriedades geométricas do fractal Ilha de Koch podem ser relacionadas com as de uma ilha real localizada num ponto qualquer do planeta? Se essas comparações forem possíveis, poderemos fazer uma projeção e calcular a dimensão desses objetos ou regiões?

A partir de tais reflexões, demonstrar o modelo de cálculo de dimensão para fractais formados por autossimilaridade estatística, aprimorado por Mandelbrot. Mostrar aos alunos e alunas os estudos realizados para o cálculo de dimensão fractal em regiões de fronteira e costas litorâneas, utilizando como cenário o mapa da Grã-Bretanha, e evidenciando a impossibilidade de medir o perímetro de uma região com muitos recortes e irregularidades, na medida que vamos reduzindo a escala de medida.

Dando continuidade, propõe-se mostrar aos discentes os mapas disponibilizados por instituições federais e estaduais, e os números oficiais do IBGE para medidas de extensão do Brasil e dos estados que possuem litoral em sua extensão territorial. Os dados cartográficos poderão ser obtidos no site do Instituto e transformados em tabela, de forma a observar a irregularidade das linhas que delimitam as fronteiras, confrontando com os números mensurados em quilômetros dessas linhas. Um exemplo disso está a seguir.

Figura 21: Mapa político do Brasil



Fonte: <https://portaldemapas.ibge.gov.br/portal.php#mapa97>

Tabela 4: Extensão da costa dos Estados banhados pelo Atlântico

ESTADO	SIGLA	EXTENSÃO DA COSTA (km)	PERCENTUAL
Amapá	AP	578,32	5,28%
Pará	PA	1.429,57	13,04%
Maranhão	MA	2.242,69	20,46%
Piauí	PI	67,32	0,61%
Ceará	CE	608,97	5,56%
Rio Grande do Norte	RN	409,45	3,74%
Paraíba	PB	153,47	1,40%
Pernambuco	PE	216,16	1,97%
Alagoas	AL	248,24	2,27%
Sergipe	SE	154,46	1,41%
Bahia	BA	1.075,85	9,82%
Espírito Santo	ES	453,93	4,14%
Rio de Janeiro	RJ	1.094,10	9,98%
São Paulo	SP	733,91	6,70%
Paraná	PR	102,73	0,94%
Santa Catarina	SC	773,58	7,06%
Rio Grande do Sul	RS	616,77	5,63%
<b>Costa Brasileira</b>	-	<b>10.959,52</b>	<b>100%</b>

Fonte: Anuário estatístico do Brasil/IBGE - Vol. 1 (1908/1912) - Rio de Janeiro (p. 1-11 até 1-14)

Ainda na terceira etapa, utilizando os métodos apresentados no capítulo anterior, propor que os estudantes realizem o cálculo da dimensão fractal da costa do estado do Rio de Janeiro, com a utilização de dados oficiais fornecido pelo IBGE. Para efeito de melhor ilustração, apresentamos abaixo um mapa disponibilizado pelo Centro Estadual de Estatísticas, Pesquisas e Formação de Servidores Públicos do Rio de Janeiro (CEPERJ).

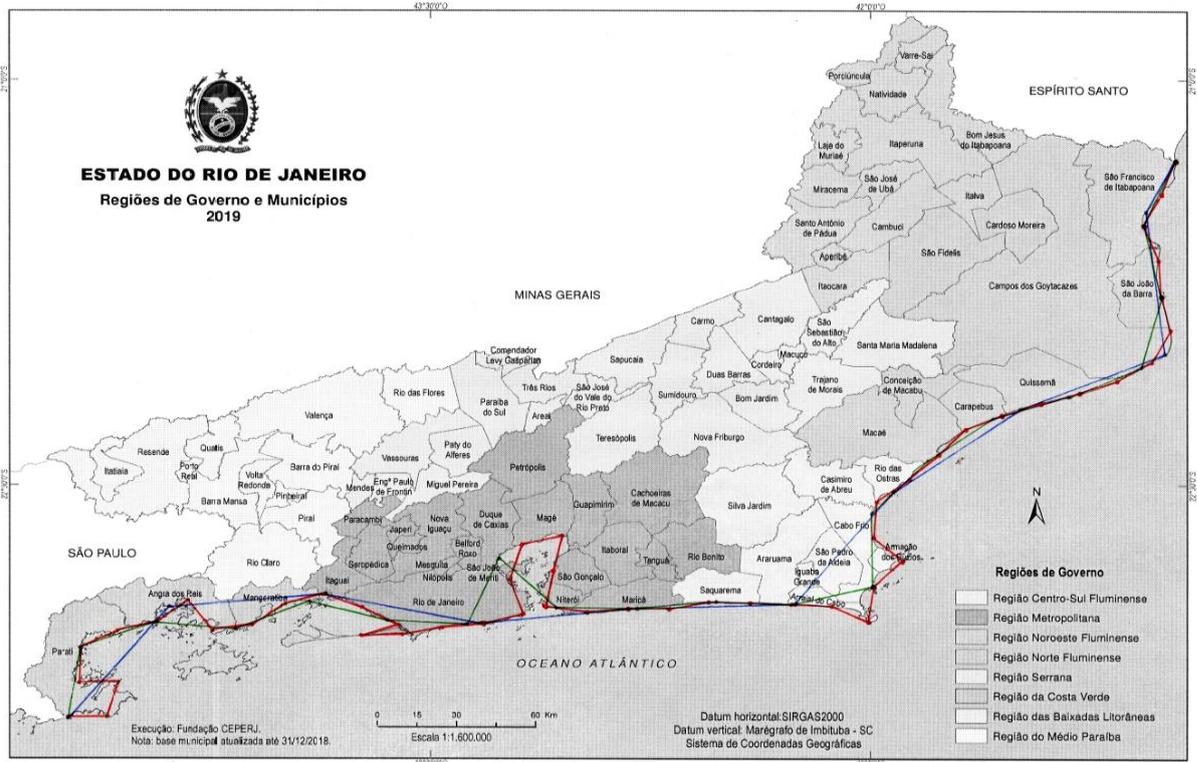
**Figura 22:** Mapa Regiões de governo e município



**Fonte:** <https://www.ceperj.tj.gov.br/wp-content/uploads/2021/08/Mapa-das-Regioes-de-Governo-e-Municipios-do-Estado-do-Rio-de-Janeiro-2019-CEPERJ.pdf>

A recomendação é imprimir o mapa em folha de papel A4, preferencialmente em preto e branco, e distribuir aos alunos e alunas de forma a permitir a utilização de caneta colorida para traçar as réguas para medição da extensão do litoral. Importante destacar que deverá ser utilizada a escala cartográfica descrita no mapa. Um exemplo desse processo está na figura a seguir.

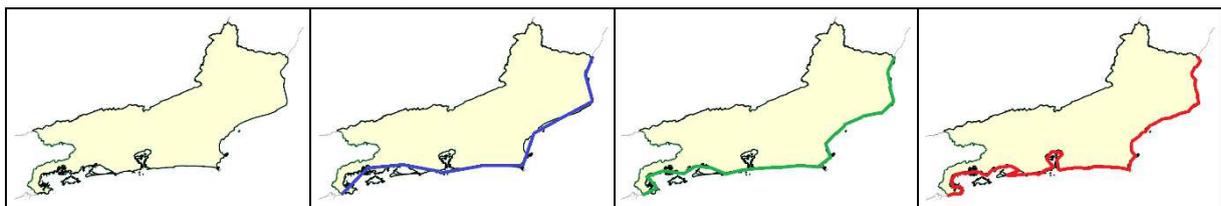
Figura 23: Medição mapa do Rio de Janeiro (1)



Fonte: Elaborado pelo autor

Na sequência, a orientação é registrar as medidas encontradas em uma tabela, como apresentado no exemplo da Grã-Bretanha e exemplificado abaixo.

Figura 24: Medição mapa do Rio de Janeiro (2)



Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 5: Estimativas para medição perímetro do litoral do Estado do Rio de Janeiro

	$G_0 = 60 \text{ km}$	$G_1 = 30 \text{ km}$	$G_2 = 15 \text{ km}$
Rio de Janeiro	$N = 9 + 0,42^* = 9,42$	$N = 20$	$N = 49$
	$L = 565,2 \text{ km}$	$L = 600 \text{ km}$	$L = 735 \text{ km}$
	$r = 1$	$r = \frac{1}{2}$	$r = \frac{1}{4}$

Fonte: Elaborado pelo autor

(\*) Parte fracionada calculada com a utilização de regra de três simples. A medida de

escala utilizada no mapa para 60 km (linha azul), equivale a uma régua de 3,6 cm. Para concluir a medição, foram necessárias 9 medidas de régua acrescida com 1,5 cm. Proporcionalmente, temos:

$$\frac{3,6 \text{ cm}}{1,5 \text{ cm}} = \frac{1}{n}$$

$$3,6 \cdot n = 1,5$$

$$n = 0,42$$

Rememorando a relação de proporcionalidade proposta por Mandelbrot (1967)

$$L \propto K \cdot (G)^{1-D},$$

$$\log L = \log K + (1 - D) \log G$$

Como vimos, a equação pode ser interpretada como uma equação reduzida da reta:

$$y = b + m \cdot x$$

$$\begin{array}{|c|} \hline y \\ \hline \log L \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \log K \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline M \\ \hline (1 - D) \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \log G \\ \hline \end{array}$$

Daí, podemos determinar a dimensão  $D$  como o coeficiente angular  $m$  da reta  $t$  que passa pelos pontos associados aos pares ordenados  $(x, y)$ , onde  $x = \log G$  e  $y = \log L$ .

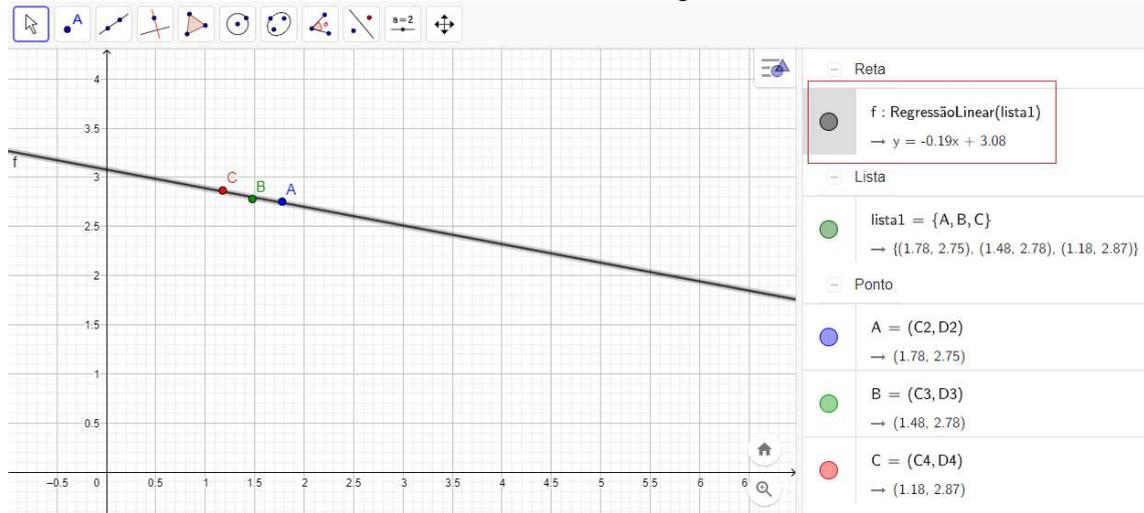
**Tabela 6:** Pares ordenados (2)

G	L	Log G	Log L	$(x, y)$
60	565,2	1,78	2,75	A = (1,78 , 2,75)
30	600	1,48	2,78	B = (1,48 , 2,78)
15	735	1,18	2,87	C = (1,18 , 2,87)

**Fonte:** Elaborado pelo autor

Com a utilização da ferramenta Geogebra, podemos plotar os pontos no plano cartesiano e observar a equação da reta  $t$  que mais se aproxima dos pontos A, B e C.

Gráfico 2: Reta t – Geogebra



Fonte: Elaborado pelo autor

Equação cálculo dimensão D:  $\log L = \log K + (1 - D) \cdot \log G$   
 Equação da reta s (Geogebra):  $y = 3,08 + -0,19 \cdot x$

A seguir, calculamos a dimensão  $D$ :

$$(1 - D) \cong -0,19$$

$$D \cong 1,19$$

#### 5.4 Quarta etapa: Nós vamos invadir sua praia!

Nessa parte da atividade os estudantes deverão se dividir em 4 grupos e cada grupo deverá mensurar a dimensão fractal de cada uma das quatro regiões de governo que possuem municípios banhados pelo litoral: Região da Costa Verde, Região Metropolitana, Região das Baixadas Litorâneas e Região Norte Fluminense, conforme distribuição da tabela a seguir.

Tabela 7: Extensão litoral dos Municípios do Estado do Rio de Janeiro

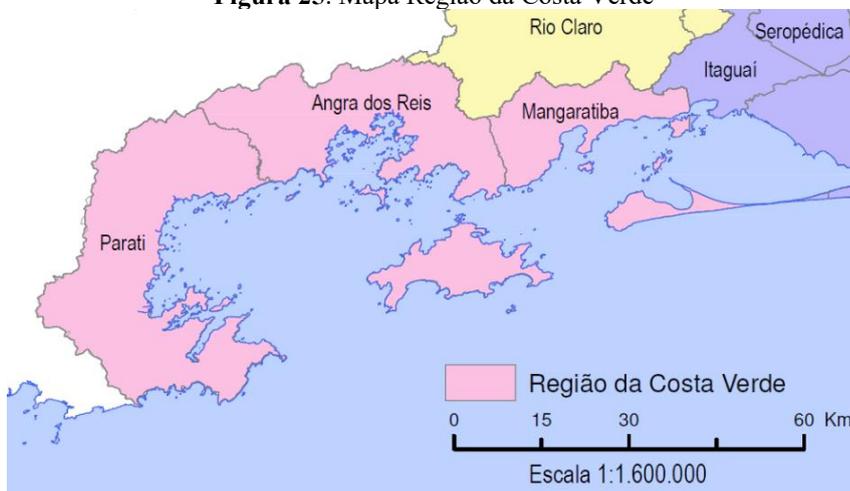
REGIÃO	MUNICÍPIO	EXTENSÃO DA COSTA (km)	PERCENTUAL
REGIÃO DA COSTA VERDE	Parati	197,93	18,09%
	Angra dos Reis	135,89	12,42%
	Mangaratiba	53,77	4,91%
REGIÃO METROPO LITANA	Itaguaí	20,74	1,90%
	Rio de Janeiro	146,08	13,35%
	Duque de Caxias	18,04	1,65%
	Magé	25,60	2,34%

	Guapimirim	8,08	0,74%
	Itaboraí	2,22	0,20%
	São Gonçalo	19,09	1,74%
	Niterói	45,80	4,19%
	Maricá	39,37	3,60%
<b>REGIÃO DAS BAIXADAS LITORÂNEAS</b>	Saquarema	26,80	2,45%
	Araruama	7,40	0,68%
	Arraial do Cabo	49,93	4,56%
	Cabo Frio	33,75	3,08%
	Armação dos Búzios	44,20	4,04%
	Casimiro de Abreu	4,71	0,43%
	Rio das Ostras	27,74	2,54%
<b>REGIÃO NORTE FLUMINENSE</b>	Macaé	21,00	1,92%
	Carapebus	16,67	1,52%
	Quissamã	43,45	3,97%
	Campos dos Goytacazes	27,25	2,49%
	São João da Barra	34,47	3,15%
	São Francisco de Itabapoana	44,12	4,03%
<b>Rio de Janeiro</b>		<b>1.094,10</b>	<b>100%</b>

Fonte: Anuário estatístico do Brasil/IBGE - Vol. 1 (1908/1912) - Rio de Janeiro (p. 1-11 até 1-14)

Para isso, deverão ser impressos os mapas de cada região em folha de papel A4, preferencialmente em preto e branco. Em seguida, deverão ser efetuadas as medidas e registradas em tabela, como já exemplificadas anteriormente.

**Figura 25:** Mapa Região da Costa Verde



Fonte: <https://www.ceperj.rj.gov.br/wp-content/uploads/2021/08/Mapa-das-Regioes-de-Governo-e-Municipios-do-Estado-do-Rio-de-Janeiro-2019-CEPERJ.pdf> - ADAPTADO



### **5.5 Quinta etapa: Sofri, mas aprendi!**

Ao final das medições e registros, os grupos poderão apresentar os resultados usando projetor, murais, cartazes ou fotografias. Logo em seguida, as apresentações poderão ser comparadas e as diferenças entre as regiões exploradas (por meio da irregularidade de suas linhas costeiras e, por consequência, por suas dimensões fractais) e concluídas com um debate mediado pelo professor(a), destacando a aplicabilidade, em todos os ramos da ciência, dos conceitos matemáticos aprendidos.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Das características que definem um fractal, a mais importante, em nosso entendimento, é a dimensão. Enquanto na Geometria Euclidiana o valor da dimensão representa a quantidade de informações que precisamos para descrever e se localizar no objeto em questão, na Geometria Fractal a dimensão representa o nível de irregularidade do objeto, como mostramos.

Essas dimensões nos parecem significativas apenas quando são números naturais, já que a linha é unidimensional, o plano é bidimensional, o espaço é tridimensional e assim por diante. Porém, a dimensão de um gráfico pode ser qualquer número real positivo e não necessariamente um número inteiro, o que podia até parecer um absurdo, mas vimos que não.

Preocupava-me mostrar isso de uma maneira experimental, mão na massa, e que trabalhasse com questões que fossem do cotidiano dos estudantes, de modo a trazer mais sentido à experiência. Foi com esse desejo que iniciei a escrita do presente texto e espero ter conseguido.

Retomando o problema de pesquisa que nos propusemos a responder, mostramos que sim, é possível explorar a ideia de fractais, especificamente o cálculo e estimativa de dimensões fracionárias, no Ensino Médio. E uma das maneiras para isso foi a indicada na atividade pedagógica, que poderá contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de dimensões fractais.

Aprender sobre fractais e suas dimensões a partir da medição da costa litorânea pode, inclusive, ser trabalhado em conjunto com as aulas de geografia, isto é, a partir da integração da Matemática com outra área do conhecimento aparentemente tão diversa.

Em relação às cinco Competências Específicas para a Matemática do Ensino Médio previstas na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), a atividade se enquadra em todas elas e mais, especificamente, na de número 3:

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2018, p. 531).

Esperamos, assim, além de garantir o que é legalmente preconizado, ter contribuído para a compreensão da geometria de objetos não tradicionais, para despertar o interesse do corpo discente e para demonstrar a possibilidade de se estabelecer modelos matemáticos que auxiliam estudos de fenômenos sociais, especificamente o cálculo de perímetro (e áreas!) de figuras não cotidianas nas aulas de Matemática.

Como perspectiva para trabalhos e pesquisas futuras, desejamos aplicar tais atividades em turmas de Ensino Médio, o que não foi possível em virtude da suspensão das atividades presenciais na escola pretendida por causa da pandemia do coronavírus que acometeu o mundo em 2020 e permanece assombrando em 2021.

## REFERÊNCIAS

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimo a Geometria Fractal para sala de aula**. 2 ed, Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). **Base Nacional Comum Curricular (BNCC): educação é a base**. Brasília: MEC. 2018. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf). Acesso em: 28 ago. 2021.

CANDAU, Vera Maria Ferrão; KOFF, Adélia Maria Nehme Simão. A Didática Hoje: reinventando caminhos. **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v. 40, n. 2, p. 329-348, abr./jun. 2015.

CARVALHO, Hamilton Cunha. **Geometria fractal: perspectivas e possibilidades no ensino da matemática**. 2005. 101f. Dissertação (Mestrado em Educação e Ciências e Matemática) – Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, Belém-PA, 2005.

CRUZ, Rita de Cássia Morasco. **Geometria Fractal: conjunto de Cantor, dimensão e medida de Hausdorff e aplicações**. 2018. Dissertação (Mestrado em Ciências Matemáticas e de Computação) – Instituto de Ciências Matemáticas e da Computação, Universidade de São Paulo, São Paulo – SP, 2018.

DAGA, Marcelo da Silva; CASTILHO, Jose Eduardo. **Uma análise da geometria fractal**. 2017. Dissertação (Trabalho de conclusão de Curso em Ciências Naturais) – Faculdade UnB Platina Ciências Naturais; Platina, 2017.

FUZZO, Regis Alessandro; REZENDE, Verediana; SANTOS, Talita Secorun. Fractais: algumas características e propriedades. **Encontro de produção Científica e Tecnológica**, 4, 20 a 23 de outubro de 2009. Anais [...]. Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão/Núcleo de Pesquisa Multidisciplinar, Campo Mourão-PR, 2009.

MANDELBROT, Benoit. How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension, **Science**, New Series, v. 156, n. 3775, p. 636-638, 1967.

MANDELBROT, Benoit. **The Fractal Geometry of Nature**. New York: W.H. Freeman and Company, 1982.

NUNES, Raquel Sofia Rebelo. **Geometria Fractal e Aplicações**. Porto: Dissertação – Universidade do Porto, 2006.

PEITGEN, Heinz-Otto; JÜRGENS, Hartmut; SAUPE, Dietmar. **Chaos and Fractals** – New Frontiers of Science. New York: Springer, 2004.

ROQUE, Tatiana Marins; PITOMBEIRA, João Bosco. **Tópicos de História da Matemática**. SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).

SALLUM, Élvia Mureb. Fractais no ensino médio. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 57, p. 1-8, 2005.

SOUZA, Jaibis Freitas de. **Construindo uma aprendizagem significativa com história e contextualização da matemática**. Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. 2009

STEWART, Ian. **Será que Deus Joga Dados?** A nova matemática do caos. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1991. 336 p.

VITORIO, Jeferson Feitoza; PRIMO, Aislan Silva. Geometria dos Fractais e sua Inserção nos Meios Físicos Naturais. **Cadernos de Graduação** - Ciências exatas e tecnológicas, Aracaju, v. 6, n.2, p. 88-100, 2020.